Die

Blinden-Tafel,

ein einfaches,

leicht zu behandelndes und nicht kostspieliges

Hülfsmittel für Blinde

aller Stände

zum Rechnen, Lesen, Schreiben und Wiederlesen des Geschriebenen, zur Bildung geometrischer Figuren mit Buchstabenbezeichnung, und zur Darstellung des Linien-Notensystemes, der diatonischen und chromatischen Tonleiter u. s. w.,

beschrieben und practisch dargestellt

vom

Dr. W. Lachmann II.,

Stifter und Director des Blinden-Institutes zu Braunschweig.

Braunschweig,

auf Kosten des Verfassers.

1841.

Druck von Fr. Otto.

Sr. Herzoglichen Durchlaucht

Herrn

August Ludwig

Wilhelm

Maximilian Friedrich,

regierendem Herzoge

zu Braunschweig-Lüneburg-Oels,

unterthänigst gewidmet.

Durchlauchtigster Herzog,

Allergnädigster Herzog und Herr,

Glück und Segen unter die Menschheit zu verbreiten, die Leiden derselben zu mindern, ist das schönste Vorrecht der Fürsten dieser Erde. Vom Throne aus geht die Kraft und die Erfüllung, die Verwirklichung der kühnsten Ideen für Menschenwohl. Unendlich Viel verdankt auch hierin das treue Braunschweigische Land seinem hochverehrten Fürsten. Unendlich Viel verdankt der hohen Gnade Ew. Durchlaucht die schuldlos unglückliche, vordem verwaisete Menschenklasse, zu deren intellectueller Verbesserung dieses Werkchen ein Beitrag sein dürfte Seit dem ruhmvollen Antritte der Regierung des Braunschweigischen Landes geruheten Ew. Durchlaucht so schöne, als zahlreiche, von allen Unterthanen freudig und dankbar gefühlte, Beweise zu geben, daß das Wohl der schuldlos duldenden Blinden Ew. Durchlaucht am Herzen liegt. Nur unter einem so hohen, als gnädigen Protectorate vermochte das Blinden-Institut in den verflossenen eilf Jahren zu dem gegenwärtigen Standpunkte der Festigkeit und Wirksamkeit zu gelangen. Nur die Gnade meines hohen Protectors vermochte, mich, trotz wankender Körperkraft, stets wieder zu beleben, und mir die Ausführung eines dreifachen Geschäftes (als Militairarzt, practischer Arzt und Director des Blinden-Institutes), wie auch literarischer Arbeiten, eilf Jahre lang, möglich zu machen.

Ew. Durchlaucht hatten die Gnade, mir die Erlaubniß zu ertheilen, die vorliegende Arbeit (als einen Versuch, den Blinden aller Classen ein Hülfsmittel zu nützlicher geistiger Beschäftigung und Ausbildung an die Hand zu geben) Höchst-Ihnen zueignen zu dürfen; ich wage nicht zu hoffen, daß diese Arbeit der hohen Gnade würdig sei.

Möchten Ew. Durchlaucht für diese allerhöchste Gnade, welche hinfort mein Stolz, und der Impuls zu fortgesetzter, thätiger Bearbeitung und Verbesserung dieser vaterländischen Anstalt sein wird, die Gesinnungen des tiefgefühlten, unterthänigsten Dankes zu genehmigen geruhen, in denen ich ersterbe

Ew. Herzoglichen Durchlaucht

Braunschweig,
am 11. November 1840.

unterthänigster, treu gehorsamster

W. Lachmann.

Vorwort.

Der Zweck dieser Blätter ist: den Blinden aller Klassen (den in glücklichen oder mäßig bemittelten Familienverhältnissen lebenden, als Kind oder in späteren Jahren sowohl, als den in eigenen Lehr-Anstalten zu bildenden und gebildeten) ein einfaches und nicht kostspieliges Mittel an die Hand zu geben, welches dem Blinden 1) bei gründlicher Erlernung der Muttersprache und fremder Sprachen wesentliche Hülfe gewährt, und mit welchem er 2) jede noch so umfassende und schwierige arithmetische, Buchstaben- und algebraische Rechnung (ja, wenn es seltene Blinde dahin bringen werden, auch trigonometrische, Differenzial- und Integral-Rechnung, selbst den Infinitesimalcalcül) ausführen, mithin sich selbstständig nützlich und geistbildend beschäftigen kann. — Leider ist mancher dieser Schuldlosen zu quälender Langeweile verurtheilt, und versinkt, um diesem Dämon zu entgehen, in Schuld und Schmach. Der dem Blinden angeborne körperliche und geistige Thätigkeitstrieb wird durch Hülfe- und Mittellosigkeit gelähmt. Mancher Blinde, hätte er in seiner Jugend ein Mittel zu richtiger und dauerhafter Ausbildung seiner guten Anlagen gekannt, würde ein in seinem engen Kreise brauchbarer, braver und zufriedener Mensch geworden sein, der vermöge seiner Bildung von Allen geduldet, von den Besseren geachtet und freundlich unterstützt worden wäre; — der aber nun, ein glebae adscriptus et fruges consumere natus, seiner Umgebung als eine unnütze, widerliche Last beschwerlich fällt; höchstens durch ein mißtönendes musikalisches Geräusch den Vorübergehenden ein Almosen und das schmerzliche Gefühl ablockt, daß er einer der vergessenen Brüder sei, dem nicht das Mitleiden des Einzelnen allein helfen konnte, sondern vorzüglich der Stern, dessen leitendem Glanze die gütige Gottheit das Wohl von Tausenden, als höchstes, der Gottheit selbst verwandtes Vorrecht anvertraute. — Wie viele glückliche Sehende, denen das Heil der vernünftigen, dem Stande angemessenen Geistesaufklärung in sorgenfreier Jugend reichlich zu Theil wurde, werden nie von dem Hauche einer wahren, allein beglückenden Religiosität berührt, und versinken, doppelt schmachvoll, im Pfuhle des Lasters. Und doch noch für sie, die Plage der civilisirten Gesellschaft, sorgt die väterliche Hand, weder Mühe noch bedeutende Kosten scheuend; mannigfache Wege zur Besserung werden diesen Verblendeten gezeigt; factische Hülfe wird ihnen zu Theil; der die Thiernatur im Menschen bekämpfende, nothwendige Zwang wird versucht; zuletzt muß, nach und mit vielen Kosten, Botanybay den Entmenschten für die friedliche Gesellschaft unschädlich machen. — Manche Sehende leiden, gedrückt durch unabänderliche, oft nicht ganz verschuldete Lebensconjuncturen; sie haben die Anwartschaft auf ihre glücklicheren Brüder; die Gottgesendete Charitas regt ihre sanften Flügel; und wenn nur wahre Religiosität, (festes Gottvertrauen mit dem festen Willen, rechtschaffen zu sein und zu bleiben), wie sie unsere treffliche Schulbildung erzielt und erreichen kann, nicht unterging in Ohnmacht des

Willens, dann werden unzählige Thränen des Jammers in Thränen des Dankes und der Reue verwandelt. — Allen diesen Beklagenswerthen bleibt aber noch das Hauptmittel, ihren Zustand zu verbessern, der umfassendste aller irdischen Sinne, das Auge; ihnen bleiben Ueberblick, Nachahmung des Gesehenen und somit selbstständige Wirksamkeit. — Aber der in zarter Jugend Erblindete, dem die zerstörten Sehorgane kaum eine Empfindung des Lichtes verrathen; in dessen Inneres nur durch Tasten und Gehör die von sehenden Kindern leicht und schnell aufgefaßten Eindrücke der Außenwelt schwer und langsam übertragen werden; dem die armen Eltern kaum Nahrung schaffen, und nimmer die schwierigere, dem traurigen Zustande angemessene Erziehung und Ausbildung geben können; dem also schuldlos die Mittel fehlen, zu lernen und zu wirken; der, von roher Umgebung oft hart behandelt und verstoßen, seine Jugend in thierischem Leben verbringt; dem die Unschuld des Herzens und die Tröstungen der Religion oft schon in zarter Jugend geraubt werden; der, leider nicht selten, Unrechtlichkeiten, Betrug und Fälschung, von ihm aus naher Umgebung durch das Gehör erlernt, und factisch nachgeahmt, als unglaublich für seinen Zustand und als einen Beweis von Klugheit bewundern hört; der nun aus einer traurigen Jugend, ohne Kenntnisse, ohne Ordnungsliebe, ohne Wohlwollen, mit gelähmtem oder falsch gerichtetem Thätigkeitstriebe, und dabei reich an unedeln Leidenschaften, hinübertritt in die Lebenszeit der Wirksamkeit; — wenn dieser nun dem Staate und seiner Umgebung als eine körperlich und geistig widerliche Last beschwerlich fällt, ist ihm der größeste Theil der Schuld beizumessen? — Deshalb das gegen den Einzelnen sich oft aussprechende Mitleiden des Einzelnen! deshalb die väterliche Sorge des, das Wohl der Nationen überwachenden Auges für diese Armen! deshalb die großen Opfer für Blinden-Unterrichts-Anstalten, besonders im Herzen Europa's, in den Deutschen Staaten!*) — Indessen trotz großer Opfer wurde es bisher nur möglich, für Einen von etwa 112 dieser Armen ersprießlich zu sorgen; Tausende, die, wenn ihnen in ihrer Jugend die mögliche Hülfe zu körperlicher und geistiger Ausbildung geworden wäre, entweder im Familienkreise oder in einer Versorgungs- und Beschäftigungs-Anstalt**)

*) In mittlerer Zahl ist in Europa unter 1000 Menschen ein Blinder; Deutschland (incl. Oesterreich und Preußen) mit 66 944-680 Inwohnern (Berghaus) hat also 66944 Blinde; davon sind durch 16 Anstalten etwa 600 versorgt, also 1 von 112; Rest 66344. — Oesterreich mit 36 519560 Inw., hat also 36519 Blinde; davon durch 4 Anstalten etwa 220 versorgte, also 1 von 166; Rest 36299. Preußen mit 14 331800 Inw. hat also 14331 Blinde, davon durch 3 Anstalten 125 versorgte, also 1 von 114; Rest 14206. (Braunschweig mit 266000 Inw., demnach 266 Blinden [des Verf. genaue Zählungen geben 293, also 1 von 908 Inw.] hat durch 1 Anstalt 15 Versorgte, also 1 von 17; Rest 251; davon 46 im Alter von 7—25 Jahren.)— England mit 27 068590 Inw., demnach 27068 Blinden; davon durch 10 Anstalten etwa 560 versorgte, also 1 von 48; Rest 26508. — Frankreich mit 33540910 Inw., demnach 33540 Blinden; davon durch 2 Anstalten etwa 150 versorgte, also 1 von 223; Rest 38390. In den übrigen Staaten Europa's sind durch Anstalten etwa 220 Blinde versorgt. Die ganze Bevölkerung Europa's zu 227,700,000 Inw. (Balbi) gerechnet, demnach mit 227700 Blinden, hätte nur 1530 durch Institute versorgte Blinde, Rest 226170, d. i. 1 von 148. Rechnen wir von dem Reste z. B. in Preußen, 14206, nur 5/8 den armen Klassen angehörend, dann werden hier 15129 nutzlos durch die Armenanstalten erhalten.

**) Verf. wird sich nächstdem erlauben, in einer gegenwärtig unter der Presse sich befindenden Schrift, seine gesammelten Erfahrungen für Blinde, in stiller Thätigkeit ein möglichst nützliches, zufriedenes, Andern nicht lästiges Leben führen würden, werden nutzlos durch die Armen-Anstalten, somit durch ihre sehenden Brüder erhalten, und versinken meistens, fast unverschuldet, in den beklagenswerthen Zustand der Demoralisation. — Unmöglich ist, für alle bildungsfähige Blinde in Unterrichts- und Erziehungs-Anstalten zu sorgen; aus diesem Grunde wurde wiederholt der Versuch gemacht, die blinden Kinder in Schulen der Sehenden zu senden, und mit letzteren zugleich den durch das Gehör eingehenden Unterricht genießen zu lassen. Aus mannigfachen, hier nicht zu erörternden Gründen, mißlangen diese Versuche fast ohne Ausnahme in allen Staaten. — Deshalb sann Verf. seit Jahren auf ein einfaches Hülfsmittel, womit der Blinde im Kreise seiner Familie und in Schulen sehender Kinder zu intellectueller und selbstständiger Ausbildung gelangen kann; und hofft dieses lange ersehnte Mittel in der hier practisch beschriebenen Tafel gefunden zu haben.

Nach der möglichst deutlichen Beschreibung (pag. 11 u. f.) ist diese Tafel, ohne Kunstkenntnisse, von jedem Tischler und Mechanicus, in Holz für 1½ Thlr. (2 fl. 15 Kr. C. M.), in Mesing für etwa 3 Thlr. (4 fl. 30 Kr. C. M.) leicht zu verfertigen, und finden sich in der Umgebung eines jeden armen Blinden wohl genug der milde denkenden Wohlhabenden, welche diese Summe durch kleine Beiträge zusammenbringen. Nach S. 13 und 14 kann jeder, nur die gewöhnliche Elementar-Schulbildung genossen habender Sehende,

und auf diese basirten Ansichten und Vorschläge in Bezug auf Unterrichts-Institute, wie auch auf Versorgungs- und Beschäftigungs-Anstalten für Blinde, zur Prüfung mitzutheilen.

ja, unsere 12—14jährigen Schulkinder, dem Blinden das Zahlensystem, und nach S. 21—24 die Handgriffe zur Erlernung des Numerirens und der 4 arithmetischen Grundoperationen lehren. Die Anleitung zur Kenntniß der Buchstaben (S. 17—19) bedarf auch keiner großen Inductionsgabe, um, ohne studirter Lehrer zu sein, einem Blinden in Erlernung und Anwendung derselben (s. S. 169) Anleitung zu geben; in Ermangelung, mit Blindenschrift gedruckter Bücher, kann ein Sehender Stephani's Hand- und Wandfibel und andere Elementarwerke benutzen. — So ausgerüstet, kann das blinde Kind sich täglich, nützlich und angenehm beschäftigen. — Mit dem Vorrücken in das reifere Alter können nach der hier gegebenen Anweisung die schwierigeren Rechnungsarten allgemach gelehrt, gelernt und eingeübt werden; der Blinde wird sich unwillkürlich an eine ordnungsmäßige, nützliche, selbstständige Thätigkeit gewöhnen, die ihn froh stimmt, vom Schlechten abhält, und seiner Umgebung nicht lästig wird. Selbst ohne einen Lehrer im Kopfrechnen wird er zu regelrechtem Denken genöthiget, und von selbst auf das verkürzende im Kopfe Rechnen geführt werden, und somit den ersten wichtigen Schritt zu seinem Heile gethan haben. — Leichter findet sich nun in des Blinden Nähe ein wohlwollender Sehender, der sich die Mühe giebt, diese Blätter genauer zu durchforschen, und ihn mit Hülfe dieses Leitfadens weiter zu führen. — Aus diesen Gründen wurde dieses Werkchen (in Darstellung der Principe und Elemente wenngleich kurz, doch genau und leicht verständlich), in den späteren, schwierigeren Abschnitten steigend ausführlicher; so daß es als ein Lehrbuch der Mathematik und als eine Anleitung zum Erlernen des Lesens, Schreibens und der Orthographie der deutschen Sprache gebraucht werden kann. — Mancher

Sehende, wenngleich ohne bedeutende Uebung im Rechnen, wird, wenn er den Inhalt dieser Blätter von Anfang an genau auf der Schiefertafel (und auf unserer Tafel) durcharbeitet, gewiß Lust an dem Rechnen gewinnen. Vom Leichteren wird langsam zum Schwierigeren aufgestiegen. Die Beispiele sind so gewählt, daß Jedermann leicht unzählige ähnliche, auf dem einen oder anderen Wege zu lösende Aufgaben, selbst zusammensetzen kann, wenn er nicht die reichen Beispielsammlungen von Hämeling, Schellenberg, Junker, Tunika, Diesterweg, Decker, Heuser, Kranke u. v. a., und für höhere Rechnungsarten von M. Hirsch, Eisenlohr, Heis, Buchner, Hufschmidt, Arndt u. v. a. zu Hülfe nehmen will. — Daß Verf. in diesen hier angewandten positiven Wissenschaften nichts Neues schaffen konnte; daß er die classischen Werke von Egen, Uhde, Sachs, Hausch, Fischer, Kreisler u. a. zu Rathe zog, da er die Mathematik stets nur untergeordnet zu eigenem Vergnügen betrieb, wird kein Gerechter, der des Verf. zeitbeengte Stellung bedenkt, ihm verargen. Aber alle diese Rechnungsarten sind durchgearbeitet, und alle Beispiele in der Wirklichkeit vom Verf. auf unserer Tafel ausgeführt, so daß hier nichts Unausführbares vorkommt. — Nur der hier abgehandelten Lehren Anwendung auf unsere Tafel ist neu, und, wie Verf. hofft, ersprießlich für diese leider noch zu wenig berücksichtigte, Hülfe bedürfende Menschenklasse.

Das Inhaltsverzeichniß verschafft einen Ueberblick über das Ganze; schließlich also nur noch einige Anmerkungen. Nothwendig ist es, um über das Ganze, wie über das Einzelne, genügend urtheilen zu können, nicht theoretisch, nach dem Buchstaben und nach vorgefaßter Ansicht zu schließen, sondern die Sache selbst practisch zu versuchen. — Daß der Nutzen dieser Tafel kein Hirngespinnst ist, beweiset die erfolgreiche Anwendung derselben im hies. Institute seit nun 10 Jahren; die Lust unserer Zöglinge bei Erlernung des Rechnens, Lesens und Schreibens auf ihr, besonders bewirkt durch die leichte Ueberwindung der, mit den bisher bekannten Hülfsmitteln (s. S. 5—8, und S. 167) unübersteigbaren Schwierigkeiten. — Nimmer ist Verf. der Meinung, daß das, dem Blinden nothwendige, Kopfrechnen nicht emsig, lange Zeit und Verstand bildend gelehrt und geübt werden müsse (s. S. 4 u. 5). Das Kopfrechnen muß (wie dem Lesen und Schreiben die Kenntniß der Laute und ihrer Zusammensetzung, s. S. 168) diesem Tafelrechnen vorangehen, und neben ihm fleißig geübt, auch stets beim Tafelrechnen angewendet werden. — Die meisten Beispiele in d. Bl. sind so gewählt, daß sie von geübten Blinden auch im Kopfe berechnet werden können. Verf. hätte anstatt dieser leichten, den Entwickelungsgang zeigenden Beispiele, eben so viele im Kopfe allein unmöglich ausführbare geben können, wie Beispiele S. 29, 35, 59, 69—74, 84, 92, 101, 103, 107, 144, 145 u. a. beweisen dürften. — Wer getraut sich, im Kopfe große 20stellige Posten mit den 4 Grundoperationen, große gemeine Brüche, Decimal- und Kettenbrüche, Kettensatzrechnung, große Quadrat- und Cubicwurzeln, Potenzirungen, Logarithmen, Progressionen, Permutationen, wer die Buchstabenrechnung und Algebra in einigermaßen großen Aufgaben (s. S. 142, 144, 145, 151 u. a.) zu bearbeiten? — Mit wie wenigen, leicht übersteigbaren Schwierigkeiten die eben genannten Rechnungen auf unserer Tafel ausführbar sind, wird Jeder erkennen, der sich die Mühe giebt, diese Blätter genauer zu durchforschen. — Das Kopfrechnen hat schwer zu bezeichnende Grenzen; der junge, reisende Kopfrechner Dase (welcher eine unglaubliche Virtuosität im Behalten und fast mechanischen Bearbeiten großer Zahlen, in Behandlung einiger Proportionalrechnungen und im Ausziehen niederer und höherer Wurzeln besitzt), vermochte nicht, im Kopfe die Zahl 17 zur 15ten Potenz (ein 19stelliges Product) zu erheben, nicht zu gedenken vieler anderer, (bei weitem leichterer, aber Nachdenken und Rechnenkunst erfordernder, von unseren Zöglingen, wenngleich langsam, doch sicher durchgeführter) Aufgaben, welche Dase nicht zu lösen im Stande war. — Im Kopfe Rechnen heißt: die Aufgabe fest fassen, nun ohne äußere Hülfsmittel im Kopfe bearbeiten, und mündlich das Resultat dieser Rechnung angeben. Mancher Blinde ist im Stande, mit Hülfe eines Sehenden, der ihm die einzelnen Posten und Berechnungsmomente wiederholt angiebt, die von dem Blinden berechneten Punkte niederschreibt, und demselben nach Bedürfniß wieder ansagt, große, fast unglaubliche Berechnungen durchzuführen; das heißt aber, nach der eben gegebenen Definition, nicht völlig „Kopfrechnen," und gewährt keine Selbstständigkeit. — Auf unserer Tafel wird die Aufgabe aufgesetzt, und bleibt unverändert stehen; was bei ihrer Lösung im Kopfe zu berechnen ist, wird nur in den Resultaten aufgesetzt; und so finden sich oft, nach Beendigung langer und schwieriger Rechnungen, nur noch wenige Zahlen auf unserer Tafel. Viele verkürzende Kunstgriffe, deren manche in d. Bl. angegeben sind, wird der Blinde, welcher in den Geist dieser Tafel eindrang, und geübt ist, nicht mechanisch, sondern mit Verstand im Kopfe zu rechnen, leicht selbst finden. Indessen muß von Anfang an Alles gründlich durchgearbeitet und eine regelrechte Ordnung eingeübt werden, um jeden einzelnen Punkt der Berechnung wiederfinden und verfolgen zu können. Nur der sehr Geübte wird und darf davon abweichen.

Als ein fernerer Beweis des erheblichen practischen Werthes dieser Tafel mag die Bemerkung dienen, daß der blinde Rechner durch sie im Stande ist, Sehende im Schiefertafel-Rechnen zu unterrichten; indem er alle Zahlen der Aufgabe, ganz wie auf der Schiefertafel, schreiben, lesen und bearbeiten, und so bei großen Aufgaben die Rechnung verfolgen, jeden Fehler auffinden und verbessern kann. Der blinde Rechner kann sich somit in Familien durch Unterricht sehender Kinder im Kopf- und Tafel-Rechnen nützlich machen, und dadurch eine rechtliche Quelle der Subsistenz verschaffen.

Noch muß Verf. hier als einen Beweis für die Brauchbarkeit dieser Tafel, seines trefflichen Zöglinges, Ludwig Holzheuer, (s. Annalen des Braunschw. Bl. Inst. I. 1834 S. 10, und II. 1838 S. 21—24), gegenwärtig Rechnenlehrer und Repetitor in hies. Institute, erwähnen, welcher — außer vielen anderen trefflichen Eigenschaften, auch mit einem eminenten Rechnentalente begabt — diese Tafel von Anfang an lieb gewonnen, und es auf ihr zu einer seltenen Virtuosität gebracht hat. (Mit ihm sind die meisten der in d. Bl. gegebenen Beispiele durchgerechnet, so daß Verf. bei den von Zweien ausgeführten und übereinstimmend gefundenen Berechnungen, nur wenige und geringe Irrungen fürchtet.) L. Holzheuer unterrichtet seit 8 Jahren unsere Zöglinge im Kopfrechnen, und hat die meisten derselben zu einer überraschenden Fertigkeit darin gebracht; so z. B. vermag ein 16jähriger Zögling die Cubicwurzel aus einer 10—12stelligen Zahl im Kopfe richtig zu berechnen; 12—15jährige Knaben lösen algebraische Gleichungen ersten Grades mit 1 und 2 Unbekannten, im Kopfe. Aber auch auf dieser Tafel unterrichtet L. H. alle im Lesen, Schreiben und Rechnen, natürlich, je nach den verschiedenen Anlagen des Einzelnen, mit schnellerem oder langsameren Erfolge; aber alle, selbst die Mädchen, betreiben diese Uebungen mit Lust und Freude. Daß L. H. auch im lebendigen, mit Verstand alle verkürzenden Kunstgriffe dem einzelnen Falle anpassenden Kopfrechnen excellirt, hatte Verf. bei mehreren Besuchen, welche uns der reisende Dase abstattete, mehrfach zu bewundern Gelegenheit. Aufgaben, welche nur einigermaßen Nachdenken erforderten, und von den gewöhnlichen Grundoperationen und leichten Proportionalrechnungen abwichen; geschweige leichte algebraische, arithmetisch zu lösende Aufgaben, war Dase nicht im Stande zu berechnen, ja, nach möglichst deutlicher Erklärung nicht einmal zu begreifen; Aufgaben, welche L. Holzheuer mit Leichtigkeit im Kopfe lösete. Daß L. H. auch im Stande ist, große Zahlen im Kopfe zu bearbeiten, bewies er schon im Jahre 1830 (s. Annalen II. p. 23) bei Gelegenheit einer öffentlichen Prüfung unserer Zöglinge, wo er die Forderung, das Alter einer anwesenden Dame (22 Jahre, 18 Tage, 6 Stunden, 7 Minuten) in Secunden zu berechnen, in 5—6 Minuten richtig (zu 695801220 Sec., mit Berücksichtigung der 5 Schaltjahre) angab. Auch berechnete er einmal im Kopfe, mit practischer Verkürzung, das 29-stellige Product der geometrischen Progression 2^{64} (s. S. 103); versicherte aber darauf, nie wieder eine so Geist tödtende und abspannende Arbeit vornehmen zu wollen. Wie genau L. H. mit den Eigenschaften der Zahlen, und namentlich der Brüche bekannt ist, möge unter Anderem beweisen, daß er das arithmetische Kunststückchen, die Summe 100 allein mit den Zahlen 1 bis incl. 9 (ohne Null) zu schreiben, in kurzer Zeit auf 22 verschiedene Arten auffand; sie mögen hier eine Stelle finden:

78, 13, $\frac{6}{2}$, $\frac{54}{9} = 100$; 78, 9, $\frac{54}{6}$, $\frac{12}{3}$; 65, 8, $\frac{91}{7}$, $\frac{42}{3}$; 73, 9, 8, 5, $1\frac{24}{6}$; 91, 8, $\frac{3}{6}$, $\frac{27}{54}$; 89, 2, $\frac{16}{4}$, $\frac{35}{7}$; 39, 57, $\frac{12}{6}$, $\frac{8}{4}$; 79, 15, 2, $\frac{6}{3}$, $\frac{8}{4}$; 67, 5, 3, $\frac{98}{4}$, $\frac{1}{2}$; 78, 4, $\frac{135}{9}$, $\frac{6}{2}$; 75, $\frac{98}{14}$, $\frac{36}{2}$; 84, 5, 1, $\frac{6}{3}$, $\frac{72}{9}$; 8, 5, $\frac{316}{4}$, $\frac{72}{9}$; 28, 9, 7, 4, $\frac{156}{3}$; 87, 5, 1, $\frac{9}{3}$, $\frac{24}{6}$; 64, 5, 7, 8, 9, $\frac{21}{3}$; 53, 1, 6, 7, 9, $\frac{48}{2}$; 35, 1, 6, 7, 9, $\frac{84}{2}$; 78, 5, 13, $\frac{96}{24}$; 9, $\frac{57}{3}$, $\frac{864}{12}$; 39, 5, 8, $\frac{672}{14}$; 98, 1, $\frac{3}{6}$, $\frac{27}{54}$.

So hat auch L. H. die meisten der Beispiele, welche die Geburtstage und Geburtsjahre mehrerer unserer gefeierten Deutschen Fürsten, algebraisch zu finden enthalten, (s. S. 138—141) im Kopfe componirt. Die verkürzende Berechnung der Permutationen von 12 Elementen (s. S. 107) ist ebenfalls von ihm im Kopfe bearbeitet. L. H. unterrichtet auch seit 6 Jahren mehrere Sehende hies. Stadt (Kinder und Erwachsene) im Kopf- und Tafelrechnen (letzteres mit Hülfe dieser Tafel und anderer fühlbarer Hülfsmittel) mit glücklichem Erfolge.

Daß der in günstigen äußeren Verhältnissen lebende Blinde, der vorwaltende Neigung zur Mathematik hat, durch einen geduldigen, die zweckmäßige Lehrmethode leicht auffindenden, Lehrer, auch in die höhere Analysis eingeweihet werden; auf unserer Tafel Rechnungen mit imaginären Größen, trigonometrische, Integral- und Differenzial-Rechnung ꝛc. ausführen kann, unterliegt keinem Zweifel. Jeder, der den Geist dieser Tafel erfaßte, wird sich, hier nicht gegebene, Bezeichnungen leicht selbst schaffen; z. B. für Sinus ($\angle$, 98), Cosinus (c $\angle$, 25 und 98), Tangente ($\diagdown$, 95), Cotangente (c $\diagdown$, 25 und 95) u. s. f.

Wie leicht die schwierige Deutsche Orthographie nach den S. 170 und 171 gegebenen Grundsätzen mit Hülfe dieser Tafel erlernt werden kann, beweisen unsere Zöglinge. — Von Erlernung fremder Sprachen (s. S. 19 und 20) hat Verf. noch keinen factischen Beweis geben können, da seine gegenwärtigen Zöglinge keine fremden Sprachen lernen sollen; indessen ist er fest überzeugt, daß wenn der Lehrer eines jungen vermögenden, zu seinem Vergnügen Französisch, Englisch oder Italienisch lernen wollenden Blinden sich die Mühe geben möchte, obige Anleitung mit Geist practisch auszuführen, das Resultat erfreulich sein wird. — Die Anwendung der Tafel auf Bildung planimetrisch-geometrischer Figuren (s. S. 165) ist beschränkt; jedoch für die Mehrzahl der Blinden genügend. [Verf. hat für einzelne, dieses Fach lieb Gewinnende, 52 Tafeln mit den nöthigen planimetrischen Figuren, mit gewöhnlicher Buchstabenbezeichnung rc. (nach Euklid und Lorenz) relief anfertigen lassen, so daß er sie nach Belieben vervielfältigen kann, (und steht anderen Instituten und einzelnen Blinden gern damit zu Dienst.)] — Die Anwendung der Tafel auf Musik (s. S. 174) ist ebenfalls beschränkt; indessen dürfte das Wenige zur Darstellung des Linien-Notensystemes und der gebräuchlichen musikalischen Bezeichnungen genügen; der Blinde kann wenigstens auf diese Weise eine klare Vorstellung der Einrichtung unserer gedruckten Noten gewinnen, und sich dann mit anderen Musikern leichter verständigen. [Zu demselben Zwecke hat Verf. auch einige Blätter mit erhabenen Stachelzügen, mittelst eines von dem sel. C. Reichardt verfertigten Notendruck-Apparates, bereitet.] Verf. ist zu wenig Musiker, um die Möglichkeit einer weiteren Ausführung musikalischer Schrift auf dieser Tafel mit Bestimmtheit verneinen zu können; hofft sogar, daß sie in den Händen eines denkenden Musikers, vielleicht durch Hinzufügung von 4 bis 6 leicht zu bereitenden verschiedenen Nadeln (mit viereckten und dreieckten Köpfen, und runde mit 1, 2, 3 und 4 horizontalen

Spitzen u. dergl.) auch hierin noch practischen Nutzen gewähren könne.

Verf. höchster Wunsch würde erfüllt, und seine mehrjährige Mühe reichlich belohnt sein, wenn die Typlo-Pädagogen diese Abhandlung einer genauen Durchsicht und der practischen Anwendung würdigen; sich dabei aber nicht durch kleine Schwierigkeiten und durch einige Langsamkeit in der Ausführung, besonders im Anfange, abschrecken lassen wollten. Sicher wird sich dann dieses Hülfsmittel einer weiteren Vervollkommnung fähig zeigen. — Sollten Vorsteher von Blinden-Anstalten oder privatisirende Blinde noch genauere Auskunft über Einzelnes wünschen; sollte Mancher, trotz der genauen Beschreibung der Tafel, sich kein richtiges Exemplar verschaffen können, dann steht Verf. auch hierin Allen gern zu Dienst.

Einige kleine Corrigenda sind: S. **16** Z. **9** u. **10** v. u. lies **3** anstatt **2**. | S. **16** Z. **7** v. u. füge hinzu: das Zeichen des Winkels wird als »kleiner« und »größer« als ꝛc. gebraucht, < >, **28** und **24**. | S. **22** Z. **11** v. u. l. später. | Manche gehobene Bruchzahlen S. **57**—**66** sind aus Mangel der passenden Typen nicht durchstrichen, also zu durchstreichen. | S. **79** muß **500** ꝛc. unter **100** stehenden, also **0** • **00210000**
500 •
und somit die folgenden **6** Zeilen entsprechend der Stellung **500**. | S. **92** Z. **11** v. o. l. × **4** : **100** = ꝛc. | S. **109** Z. **12** v. u. l. a c • b d | S. **110** links Z. **16** v. o. l. × a + b; rechts Z. **14** v. o. l. a b • • b : anstatt •. | S. **73** Z. **13** v. u. l. = **1** : **12**; **12** : **24** = **1** : **2**; und endlich **2** : **2** = **0**. | S. **144** Z. **18** v. o. l. $106_{/4525}$ **h** = **850** ꝛc.

Inhaltsverzeichniß.

Einleitung.

Als Verfasser im Jahre 1822 in der reichen Göttinger Bibliothek die bis dahin bekannt gewordenen, für Blinde erfundenen Lern-Hülfsmittel aufsuchte, fand er in der Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par Diderot et d'Alembert, 1778, Tom. IV., Art. *Aveugle*, daß sich der blinde Nikolas Saundersson (geb. 1682 zu Thurlston in Yorkshire, gest. 1739 als Professor der Mathematik zu Cambridge) zur Ausführung schwieriger algebraischer Rechnungen einer regelmäßig parallel durchlöcherten Tafel, in welche er kleine Pflöcke steckte, bedient habe. Die Zeichnung, Fig. 14, machte die Leichtigkeit und Deutlichkeit dieser Methode klar, weshalb Verf. eine Copie jener, mit kurzer Erklärung, seinen Collectaneen beifügte. Nicht ohne Befremden fand Verf. auf seiner ersten literarischen Reise in den Jahren 1824 und 25, daß dieses, von einem ausgezeichneten blinden Mathematiker erdachte und langjährig erprobte Hülfsmittel für den Blinden, weder in Zürich und Neapel, noch in Wien, Prag, Dresden und Berlin eingeführt, ja, daß dieses einfache Instrument kaum dem Namen nach bekannt war. In den Jahren 1828 und 29 machte er dieselbe Erfahrung zu Amsterdam, Paris, London, Dresden und Berlin; ebenso 1835 zu Freising, Gmünd und Bruchsal; 1837 zu Hamburg, und 1839 zu Dresden, Breslau, Wien, Linz und Prag.

Die Hauptgründe, warum diese treffliche Tafel (deren praktischen Werth Verf. nach der ersten Anfertigung derselben schon im Jahre 1830 genauer kennen lernte, weshalb er sie schon damals in mehreren Exemplaren in seinem Blinden-Institute einführte, und mit wirklichem Nutzen seitdem gebrauchte und noch fortwährend gebraucht) so tief vergessen ist, glaubt Verf. in Folgendem gefunden zu haben:

1. Saundersson selbst hat uns keine Beschreibung und Erklärung über diese Erfindung hinterlassen; bei dem Antritte seiner

Professur schrieb er: Elements of algebra, Cambr. 1712; er wurde in seinem 57sten Jahre vom Tode überrascht. Der Nachfolger in der Professur der Mathematik zu Cambridge, William Inchlif, erhielt von der Wittwe Saundersson die Erlaubniß, die nachgelassenen (zweifelsohne einem Schreiber dictirten) Manuscripte und andere mathematische Gegenstände genau zu durchforschen, und das nach seiner Meinung Wichtigste bekannt zu machen. Dies that derselbe in: »The life and caracter of Dr. Nich. Saundersson, late Lucasian Professor of the mathem. in the univers. of Cambridge, by his disciple and friend W. Inchlif, Dublin 1747;« und in: »N. Saundersson's Algebra. London 1752.« In dem Vorworte des letzteren Werkes finden sich ebenfalls einige Nachrichten über das Leben und den Charakter Saundersson's. — Fernere Notizen über diesen merkwürdigen blinden Professor finden sich in: The universal Magazine, May 1752; Robert Green, principles of natural philosophy, Cambr. 1778. Vol. I. pag. 18 u. f.; Caesars Denkwürdigkeiten aus der philosoph. Welt, Leipzig 1788. Bd. VI. Nr. 1.; C. Riesen, Rechnenkunst für Sehende und Blinde, Mannheim 1773 (hier findet sich die Abbildung eines Stückes der Saund. Tafel); C. Riesen, Algebra für Sehende und Blinde, Mannheim 1777. In den Philosophical Transactions von 1741 findet sich eine Abhandlung u. d. T.: »Die durch das Gefühl entzifferte Arithmetik, erfunden von N. Saundersson, beschrieben von dem Nachfolger dieses berühmten Professors.« Hier ist die ausführlichste Beschreibung der Tafel; jedoch haben sich hier Undeutlichkeiten und einige störende Unrichtigkeiten eingeschlichen, welche gewiß nicht ohne Einfluß auf das Vergessenwerden dieser Tafel gewesen sein mögen, da diese Abhandlung die Hauptquelle zu sein scheint, aus welcher die späteren Schriftsteller schöpften. Hier heißt es: »Diese Scheibe ist glatt und dünne, und ist etwas größer als ein Quadratfuß. Sie hat einen kleinen hervorspringenden Rand. Sie ist mit vielen Parallellinien, in gleich weiter Entfernung von einander, und mit eben so vielen andern solchen Parallelen, welche mit den ersteren rechte Winkel machen, bezeichnet. Die Ränder der Scheibe haben Vertiefungen (Fugen), etwa einen halben Zoll weit von einander; zu jeder Fuge gehören fünf von den genannten Parallelen, so daß jeder Quadratzoll in 100 kleinere Quadrate getheilt ist. In jedem Punkte, wo sich die Linien durchkreuzen, ist ein kleines Loch, durch welches ein Stift gesteckt wird. Vermittelst dieser Stifte drückte Saundersson seine Zahlen aus, u. s. w.« — Theilen wir jeden halben Quadratzoll (wohl $1/4$ Quadratzoll, sonst würden die Quadratchen Oblonge werden) durch fünf sich durchkreuzende Parallelen, so giebt dies 4 kleinere Quadrate, jedes zu 9 Quadratchen; mithin würde der Quadratzoll nicht in 100, sondern in $4 \times 36 = 144$ kleine Quadrate, jedes zu 1 Linie getheilt. Saundersson hatte zwischen je fünf Quadraten (also auf $1 1/4$ Zoll Entfernung) eine Furche angebracht, in welcher auf den Durchkreuzungspunkten der Parallelen ebenfalls Löcher waren; in diese Löcher steckte er, wahrscheinlich anders geformte, Pflöcke zur Bezeichnung von mathematischen Zeichen, und vielleicht auch von Buchstaben; bei den von ihm durch Aufspannen von Fäden auf dieser Tafel gebildeten geradlinigten geometrischen Figuren hat er keine Buchstaben angewandt; er bedauert wiederholt, keine Hülfsmittel zum Lesen und zum Schreiben zu besitzen. Obgleich sich in keiner diesen Gegenstand behandelnden Schrift eine deutliche Spur von Buchstabenbezeichnung findet, ist doch wohl anzunehmen, daß Saundersson, da er, der Angabe nach, algebraische Rechnungen auf seiner Tafel ausführte, auch entsprechende Bezeichnungen erdacht habe.

2. Fast alle Blinden-Lehrer Deutschlands verdanken ihre Kenntniß dieses Unterrichtes unseren beiden Nestoren, dem k. k. Rathe, Herrn Joh. Wilh. Klein zu Wien, der im J. 1804 in Deutschland das große Werk begann, welches der Vater des Blinden-Unterrichtes, Val. Hauy, 1785 in Frankreich begründete; und dem Professor Herrn Aug. Zeune zu Berlin, welcher im J. 1806 in Folge einer Aufforderung und Unterstützung des Königs von Preußen, nachdem Hauy Demselben in Berlin (auf einer Reise von Paris nach Petersburg) Proben dieses Unterrichtes gegeben hatte, eine Anstalt d. A. für Preußen anlegte. Unserm Vater Klein war die von Niesen (Lehrer des blinden Wessenbourg, s. Rheinische Beiträge 1778) dem Anscheine nach verbesserte Saunderssonsche Tafel wohl bekannt, und finden wir die Beschreibung und Abbildung dieser verbesserten Niesen'schen Tafel in dem vortrefflichen »Lehrbuche zum Unt. f. Bl., Wien 1819, S. 95 — 99, und Fig. 13. In dieser vermeinten Ver-

besserung finden wir aber kaum Saundersons Idee wieder, und ist es nicht zu verwundern, daß diese Tafel keine Anhänger fand. Es gehört freilich nur ein Stift zur Bezeichnung aller Zahlen; allein die Stellung dieses auf dem Quadrate kann nur durch genaues Umfühlen des Quadrates in der Furche gefunden werden; während nach Saundersons Erfindung ein einfaches Berühren der beiden Pflöcke mit einer Fingerspitze sogleich ohne Irrthum die Zahl erkennen läßt. Die Schwierigkeit der Anfertigung der Riesenschen Tafel kommt ebenfalls noch in Betracht. — Unser hochverehrter Zeune kannte auch wahrscheinlich nur die durch Riesen veränderte Tafel. Auch war Zeune mit Recht mehr für das Kopfrechnen und für stereometrische Eindrücke. In der »Neuen Berliner Monatsschrift von Biester, 1808, Februar, S. 19,« sagt er: »Auf solche Maschinen halte ich deswegen nicht so gar viel, weil sie die Originalität der Zöglinge stören. Ich gebe ihnen hölzerne Würfel zum Rechnen; denn nur das Zählen, nicht das Zifferrechnen führt zur inneren Anschauung, und der Zögling bekommt da wirklich eine Zahl in die Faust.« Ein gewiß sehr richtiges und bei allen jungen Zöglingen stets von allen Lehrern ausgeführter Grundsatz. — Somit übten die Lehrer mit ihren Zöglingen das dekadische Zahlensystem an den Fingern, dann mit Körpern (Klötzen, Nüssen, Bohnen) und auf der russischen Rechnen-Maschine ein; übten besonders das Kopfrechnen, und halfen bei Multiplication und Division wohl mit der Rechnenschnur nach.

Gewiß ist das Kopfrechnen, auf eine zweckmäßige Weise betrieben, ein vorzügliches Hülfsmittel zur Weckung und Regelung des Denkens; auch ist es besonders das Kopfrechnen, was der Blinde in seiner späteren isolirten Stellung mit Nutzen im Leben anwendet. Fast alle blinde Kinder haben Neigung und Lust zum Kopfrechnen. Durchaus nothwendig ist es, dem jungen Zöglinge klare Begriffe durch stereometrische Größen zu schaffen, genau systematisch zu verfahren, und keine Undeutlichkeit zu dulden. Die vier Species in unbenannten und benannten Zahlen, Brüche, Regulabetri, selbst Ausziehen kleiner Quadrat- und Cubik-Wurzeln lassen sich durch Kopfrechnen ausführen, und müssen auf diese Weise, in gewissen Grenzen, geübt werden. Aber — das Kopfrechnen hat seine Grenzen, und selbst bei den fähigsten, sich diesem Wissenszweige vorwaltend hingebenden Blinden, welche, uns Sehenden unmöglich im Kopfe zu berechnen scheinende, Aufgaben auf diese Weise lösen, ist eine große geistige und körperliche Abspannung, und Untauglichkeit zu andern Arbeiten auf eine Zeit lang die unausbleibliche Folge solcher einseitigen Geistesanstrengung. — Viele Blinde möchten gern weiter gehen, möchten die schwierigeren Rechnungsarten, Algebra, Potenzen, Permutationen, Binomen, Polynomen, höhere Gleichungen zu behandeln erlernen. Hier straucheln alle. — Welch' eine Arbeit (die im Leben des Rechners nicht selten vorkommt) ist: im Kopfe Brüche zu addiren, von diesem Facit in Brüchen zu subtrahiren, und diesen Rest wieder mit Brüchen zu dividiren, wobei noch die Verschiedenheit des Gewichtes, der Münzen u. s. w. die Schwierigkeit erhöhet! Welche Zahlen sind hier zu behalten! dann sogleich aber wieder fallen zu lassen, um neue große Zahlen festzuhalten. Nach mehrstündiger Kopfanstrengung ist das Resultat der Rechnung doch wohl unrichtig; hier können nicht einzelne Posten, in welchen der Fehler vermuthet wird, geprüft werden, sondern die ganze Rechnung muß von vorn beginnen; ein Sehender muß stets zur Hand sein, die gegebenen Zahlen zu wiederholen, oder noch besser, mit dem Blinden zu rechnen, und das Berechnete niederzuschreiben. Trostlose, abhängige, abspannende, Gleichgültigkeit und zuletzt Widerwillen erregende Arbeit! — Von Buchstabenrechnung können höchstens die Elemente im Kopfe bearbeitet werden; Decimalen, Logarithmen, Permutationen, höhere Gleichungen lassen sich, einzelne günstige Verhältnisse ungerechnet, nicht durch Kopfrechnen bearbeiten.

Keinem Zweifel unterworfen ist es also, daß dem Blinden ein einfaches, nicht theures, mechanisches Hülfsmittel zum Rechnen höchst wünschenswerth ist.

Die bisher dem Verf. bekannt gewordenen Hülfsmittel d. A. sind folgende: Stereometrische Größen zum Zählen, (Finger, Klötzchen, Nüsse, Kugeln, Bohnen u. s. w.); Zählkugeln auf der Schnur; die Rechnenschnur; die russische Rechnenmaschine; Nepers Rechnenstäbchen; Pestalozzi's Einheits- und Bruchtabelle; Pöhlmann's Bohnen und Stäbe; Denzel's Leiter von zehn Sprossen, und Tillich's Würfel und Stäbe. Wie weit man mit diesen Hülfsmitteln kommt, weiß jeder Lehrer, und werden alle diese Hülfsmittel nach richtiger Anleitung bald durch das Kopfrechnen entbehrlich.

Neuerdings (1831) hat M. Asmus, Lehrer zu Dorpat, die russische Rechnenmaschine als ein treffliches Hülfsmittel bei dem Rechnenunterrichte auch für Blinde empfohlen. Ist Verf. auch mit den Grundsätzen beim Rechnenunterrichte dieses gewiß trefflichen Lehrers einverstanden, muß er doch bemerken, daß das Resultat, welches er nach der ersten genauen Prüfung dieser Maschine in Bezug auf den Blinden (i. J. 1830) gewonnen hatte, durch dieses Werkchen des Herrn Asmus (das ihm erst 1837 in die Hände kam) nicht geändert wurde. Das Numeriren, Addiren und Subtrahiren mit geringen Posten läßt sich ausführen; Multiplication und Division weichen aber auf dieser Maschine theils von der gewöhnlichen Art ab; theils auch wird das Behalten großer Zahlen im Kopfe gefordert; die gegebenen Zahlen sind durch diese Veränderungen verwischt; es ist die Handhabung der Maschine mehr Kopf- als Tafelrechnen; Multiplication, Division und die folgenden Rechnungen sind zusammengesetzte, künstliche Operationen, welche mehrere Rechnenbretter neben einander fordern, oder zwei nach den Kugelschnüren getheilte Schiefertafeln am Rande erheischen, auf welchen der Multiplicator, der Divisor, der Quotient u. s. w. geschrieben werden müssen. Wir könnten freilich, anstatt der Schiefertafeln, einschiebbare, aufgeklebte Hochdruckzahlen substituiren (und hat Verf. auch eine solche Maschine anfertigen lassen); indessen verschmähen seine Zöglinge, welche mit der Manipulation unserer Tafel bekannt sind, dieses Hülfsmittel, als ein schwieriges, mangelhaftes und weitläufiges. Wir verweisen auf: »M. Asmus, das russische Rechnenbrett. Leipzig 1831.«

Der Rechnenkasten, wo erhabene hölzerne Zahlen in horizontal und vertikal parallel laufende Löcher gesteckt werden, ist Hauy's Erfindung. In Deutschland hat man diese Löcherreihen in parallele Leisten geändert, zwischen welche die geschwänzten Zahltypen eingesteckt werden, wobei das richtige Untereinandersetzen der Zahlen noch größere Schwierigkeit und Unsicherheit verursacht. Die Kosten der hier nöthigen 10 verschiedenen Zahltypen in 10 Kasten sind nicht unbedeutend; von jeder Zahlart müssen mindestens 30, also 300 Stück, vorräthig sein; das Richnenbrett selbst fordert zu mäßigen Rechnungen die Größe von 2 bis $2\frac{1}{2}$ Fuß Quadrat; der Rechnende muß jede Zahltype aus dem Kasten nehmen, zuvor lesen (verläßt er sich auf die Kasten, dann giebt's viele Druckfehler!), dann sie gerade und an dem richtigen Orte einstecken; der mit den Fingern zu durchlaufende große Raum ist nicht minder erschwerend. Endlich fehlen hier noch die mathematischen Zeichen, deren Bereitung in Holz kostspillig ist, und deren Aufbewahrung nun noch ein Dutzend Kasten erfordert. Alle diese combinirten Schwierigkeiten haben manchen, zu höheren Rechnungsarten sich hingezogen fühlenden Blinden von bedeutenden Fortschritten abgehalten.

In Glasgow*) scheint man auf eine, dem Saunderson'schen Principe nahe verwandte Idee gekommen zu sein; vielleicht hat man hiebei, aus Liebe zu neuen Erfindungen, die in England doch wohlbekannte Saund. Tafel ignorirt. The arithmetic Board ist eine Tafel mit pentagonischen Vertiefungen, in welche pentagonische Klötzchen von entsprechender Größe gesteckt werden. An dem einen Ende eines solchen Klötzchens ist ein vorspringender Zapfen auf einem Winkel, an dem andern Ende ein solcher auf der zu diesem Winkel gehörenden Seite angebracht. Die Winkel des Pentagons geben die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, die Seiten 2, 4, 6, 8, 10. Wie mit Hülfe dieser Tafel mehr als das dekadische System auf eine schwierige Art entwickelt und geübt werden kann, sieht Verf. nicht ein. Enthält jedes vertiefte Pentagon in seinem Umfange 10 Löcher zur Aufnahme des Zäpfchens? Die Zeichnung zeigt deren nur eines in jedem Pentagone. Welche Schwierigkeit in Verfertigung dieses Brettes würde dies veranlassen! Welche Schwierigkeit wäre es für den Blinden, die Zäpfchen genau in eines der nahe neben einander liegenden 10 Löcher zu stecken! Zweckmäßiger dürfte es wohl sein, die Klötzchen an einem Ende flach, ohne Zapfen, anzuwenden und mit diesem Ende einzustecken, in welchem Falle der aufrecht stehende Zapfen in verschiedener Stellung die Zahlen bezeichnete; dann bleibt doch aber die große Schwierigkeit des Erkennens übrig, indem die Erforschung, welcher Winkel oder welche Seite vorliegt, bei

*) S. Statements of the education etc., adopted at the Asylum for the blind. Glasgow, Jan. 1835. pag. 16. Tab. II. Fig. 1.

der feinen Nüançirung große Genauigkeit und vielfaches Umgreifen fordert.

Verf. hat einen Rechnenkasten anfertigen lassen, welcher das Prinzip der Saunderss. Tafel stereometrisch entwickelt. Er ist $18^1/_2$ Zoll (Par. M.) quadrat, und 4 Zoll hoch, auf der offenen oberen Fläche befinden sich vertikal und horizontal 900 parallel laufende, knapp 6 Linien große Quadrate, 6 Linien tief; die Scheidewände 2 Linien dick; in diese werden willig einzuschiebende, 9 Linien lange, 5 Linien viereckte Klötzchen eingesteckt. Zum Rechnen sind dieser Klötzchen drei verschieden bezeichnete nöthig; a) ein Knopf in der Mitte zur Bezeichnung der 1; das entgegengesetzte Ende bezeichnet 0; b) ein Knopf an einem Winkel zur Bezeichnung der 3, 5, 7 und 9; c) ein Knopf in der Mitte einer Seite zur Bez. der 2, 4, 6 und 8. Zu den mathematischen Zeichen gehören 6 Klötzchen: a) zu Addition, Subtraction, Multiplication und Division, b) Trennungszeichen u. Gleichheitsz. c) Bruchstrich, d) Klammer, e) Winkel, und f) Wurzelzeichen. — Mit 8 Typen werden alle Buchstaben, und mit einer wird die Interpunction ausgeführt. Diese Klötzchen (2800 Stück) befinden sich in einer $2^3/_4$ Zoll hohen, in 19 Fächer getheilten Schiebelade unter dem Rechnenbrette. Die Leichtigkeit und Sicherheit der Behandlung dieses Brettes liegt klar vor; jedoch steht diese Maschine der weiter unten zu beschreibenden bedeutend nach, da diese letztere leichter, kleiner und minder kostspillig ist, auch alle Zahlen, Zeichen und Buchstaben mit zwei Arten von Nadelknöpfen ausgeführt werden; bei unserm Kasten aber doch verschiedene, wenn gleich nur 18, Typen hervorgesucht, umfühlt und eingesteckt werden müssen.

Der Mangel eines zweckmäßigen Hülfsmittels zum Tafelrechnen bewog den Verf. schon im J. 1830, die Beschreibung der Saunderss. Tafel hervorzusuchen. Nach der Beschreibung in Phil. Transact. »hat die Platte Fugen von $^1/_2$ Zoll Abstand; zu jeder Fuge gehören 5 Parallellinien, so daß jeder Quadratzoll in 100 kleinere Quadrate getheilt ist.« Auf diese Weise ausgeführt zeigte sich eine unbrauchbare Kleinheit.

— Die Beschreibung und fehlerhafte Zeichnung in der Encycl. génér. bestimmt keine Größe. Da jedes Quadrat von 9 Löchern für eine Zahl bestimmt ist, welche durch Auflegen einer Fingerspitze erkannt werden soll, wurde zuerst die Entfernung der Parallelen zu 2½ Linien Par. M. gewählt, auch zwischen je 3 Parall. ein 3 Linien großer Raum gelassen. Bald aber zeigte sich, daß dieser Raum nicht zur Deutlichkeit beiträgt, wohl aber die Tafel unnöthig vergrößert und vertheuert; dann auch, daß die Parallelen einander noch mehr genähert werden konnten. Somit wurde die Entfernung derselben auf höchstens 2 Linien P. M., für Geübte auf 1½ Lin. verringert. Einige solcher Tafeln in Holz und in Messing angefertigt, wurden in Schulgebrauch genommen, und zeigte die Leichtigkeit, Sicherheit und Lust, mit welcher selbst 9—10jährige Kinder die Zahlen lernten und im Tafelrechnen anwendeten, die Vorzüglichkeit dieses Hülfsmittels. Allgemach gewährte diese Tafel in den Händen eines in Mathemathik excellirenden Blinden (des Ludwig Holzheuer von Hessen, cf. Annalen II. 1838, S. 21—24) eine vielseitige, kaum geahnete Anwendbarkeit, besonders in Bezug auf mathematische Zeichen und auf Abkürzung im Rechnen. Die Einfachheit dieses Instrumentes, die Leichtigkeit und Sicherheit der Ausführung der schwierigsten Rechnungsarten, und endlich die Entdeckung, daß durch Hinzufügung einer einzigen Nadel das ganze deutsche Alphabet mit Leichtigkeit und Bestimmtheit bezeichnet werden kann (eine Entdeckung, von der sich in keiner diesen Gegenstand berührenden Schriften und Bemerkungen die geringste Spur findet, obgleich bei der Einfachheit der Ausführung und mathematischen Unmöglichkeit, außer den 25 Buchstaben und den drei Doppelvokalen noch eine neue Nadelstellung mit einer Primnadel und 2 anderen Nadeln hervorzubringen, es fast unglaublich macht, daß nicht der erfinderische Saunderson darauf gekommen sein müßte), bewog den Verf. schon im J. 1831, mehrere solcher Tafeln von verschiedener Größe in Messing und Holz anfertigen zu lassen, und dieses treffliche Hülfsmittel beim Unterrichte im Rechnen, Schreiben und Lesen zur Freude und zum Nutzen seiner Zöglinge in hiesiger Anstalt einzuführen.

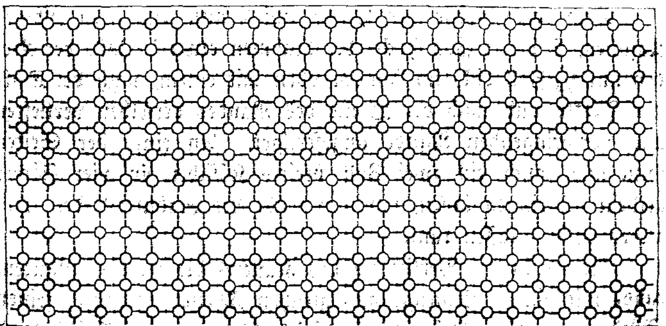
Obgleich Verf. der Meinung ist, daß die Formen der Buchstaben für den Blinden von denen, deren wir Andern uns bedienen, nicht eben abweichen dürfen, um den Blinden dem Vollsinnigen näher zu stellen; weshalb Verf. die Chiffern-Schrift (wovon er auch eine Art unter dem Namen der geometrischen Schrift zu Preßdruck bereitet hat) für Vergnügungsobject manches gebildeten Blinden hält; kann er doch nicht umhin, zu bemerken, daß diese, weiter unten genauer auszuführenden Buchstaben-Formen dem Blinden mancherlei Nutzen gewähren. Zum Rechnen lernt der Zögling die Zahlen; mit einer leicht an der Größe des Knopfes erkennbaren Nadel bezeichnet er alle Zahlen; durch Hinzufügung einer zweiten gleichen Nadel entstehen die Buchstaben; diese zwei Nadeln kommen in Löcher, welchen im Zahlensysteme eine Zahl angehört; mithin giebt diese Doppelzahl dem Buchstaben eine mathematische Bezeichnung, mit deren Hülfe der Blinde Briefe dictiren kann, ohne daß der Schreiber die geringste Ahnung hat von dem, was er schreibt. Der Schlüssel zu dieser Zahlenschrift ist so leicht, daß ein mäßig gebildeter Sehender die genaue Bekanntschaft dieser Schrift in weniger als $\frac{1}{4}$ Stunde machen kann, um das Geschriebene zu dechiffriren. — Bei Rechnungen mit benannten Zahlen, bei der Buchstabenrechnung, dann auch zu den mathematischen und Interpunctionszeichen bedarf man keiner fremden Zeichen, hat nicht aus vielen Kasten hervorzusuchen, da nur zwei Arten von verschieden geknopften Nadeln nöthig sind. Nur zur übergroßen Deutlichkeit und Bequemlichkeit hat Verf. bei schwierigeren Rechnungsarten noch zwei Arten von leicht anzufertigenden Nadeln hinzugefügt. — Eine Tafel in der Größe eines Quartblattes, über 2750 Löcher enthaltend, ist groß genug, ein 23stelliges Additionsexempel von 12 Posten, ebenso Addition in Brüchen von 10 bis 12 Posten, und das Gewöhnliche der Buchstabenrechnung bequem auszuführen; eine solche Tafel, wie ein Buch gebunden, ist leicht unter dem Arme geführt, und dient dem Blinden auch als Portefeuille, in welchem er sich schnell Zahlen, Worte und Sätze notirt, welche er nach Belieben wieder lesen kann.

Sehr verschieden von dieser Tafel ist die neuerdings in Frankreich aufgekommene Punktmanier, deren genaue Kenntniß Verf. leider sich noch nicht verschaffen konnte; so viel ist ihm aber davon klar geworden, daß in ihr viel mögliche Abweichungen, mithin große Willkühr herrscht, während bei unserer Punkt-stellung eine mathematische, weder Irrthum, noch Willkühr zulassende Ordnung stattfindet.

Nachdem während 9 Jahren die Leichtigkeit der Erlernung dieser Zahlen und Buchstaben und die praktische Anwendbarkeit dieser Tafel bei vielen hiesigen Zöglingen erprobt ist, hält Verf. es für seine Pflicht, seine Amtsgenossen auf dieses treffliche Hülfsmittel bei dem Blinden-Unterrichte aufmerksam zu machen, und hält sich überzeugt, daß sowohl unsere Nestoren, als auch die jüngeren geehrten Collegen, nach genauer Prüfung, seiner Ueberzeugung beitreten werden.

Beschreibung der Tafel.

In einer, auf der einen Fläche polirten, Platte von hartem Holze oder von Metall, befinden sich parallel laufende Reihen von Löchern in einem Abstande von $1\frac{1}{2}$ bis 2 Linien (Par. M.) und von der Größe, daß gewöhnliche Färbernadeln bequem hindurchgesteckt werden können.



Die Anfertigung dieser Platte geschieht auf folgende Weise: Man läßt sich eine rechtwinklige viereckte oder länglicht-viereckte, etwa 1 Fuß Quadrat, oder $1\frac{1}{2}$ bis 2 Fuß lange und 10 bis 16 Zoll hohe, und $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{4}$ Zoll dicke Tafel von hartem Holze (Ahorn, Mahagony, Jacarando) aus 3 bis 4 aufeinandergeleimten Fournieren bereiten, und auf einer Fläche poliren. — Dauerhafter, und deshalb vorzuziehen, ist eine Platte dieser Größe von Messing (gewalztem Messingblech), nur $\frac{3}{4}$ Linien dick, welche man genau richten und auf einer Fläche poliren läßt. Nun werden, 2 bis 3 Linien vom Rande der Tafel anfangend, genaue Parallellinien von $1\frac{1}{2}$ bis 2 Linien Entfernung, der einen Seite der Tafel entsprechend, auf der polirten Seite fein eingerissen; dann zieht man eben solche Parallelen der andern Seite entsprechend, also die ersteren rechtwinklicht durchkreuzend. Auf den Durchkreuzungspunkten werden die hier zu bohrenden Löcher mit einem gehärteten spitzen Stempel, auf welchen man ein paar leichte Hammerschläge ausführt, angezeigt, und nun die Löcher mit dem Drillbohrer rechtwinklicht und rein durchgebohrt, so daß der Bohrgrat auf der untern Fläche stehen bleibt. Die obere glatte Fläche wird mit Bimstein, Schmirgel und Schachtelhalm nochmals geglättet. — Ist man im Besitze einer gut gebohrten Messingplatte, dann kann man an diese die neu zu bohrende Platte anschrauben, und diese durch die erste hindurch schneller und doch genau bohren. — Der 2 bis 3 Linien breite Rand der Platte wird mit einzelnen größeren Löchern (etwa 10 — 16) zur Aufnahme von kurzen Holzschrauben (3 — 4 Linien lang und 1 Lin. dick) versehen.

Nach der Größe der Platte wird nun ein oben offenes Kästchen, 2 bis 3 Zoll hoch (der Rahmen etwa $\frac{1}{4}$ Zoll, der Boden nur $\frac{1}{6}$ Zoll dick) im Innern oben mit einem, nach der Dicke der Platte und nach der Breite des Randes derselben vertieften und vorspringenden Rande angefertiget. An einer der Seiten kann man auch ein zwei Zoll breites Kästchen in vier Fächer getheilt anbringen lassen, von der Höhe des Rahmens, den man außen poliren lassen kann.

Man füllt die Vertiefung des Kastens bis zu dem Plattenrande mit einem Gemenge aus gleichen Theilen trocknen, feinen Sandes und dito Kleie; preßt dieses Gemenge gleichmäßig und mäßig fest ein, legt darauf ein Stück wollenen nicht zu dichten Zeuges (dünnen Coating, Multum, Flanell) genau von der Größe der Platte; legt diese darauf, mit der polirten Fläche nach oben, und schraubt die Platte und das Zeugstück auf dem inneren vorspringenden Rande des Kästchens mit Hülfe kleiner Holzschrauben fest.

Man kann diesem Kästchen auch die Form eines Buches geben; die Platte wird dann nur in einen hölzernen Rahmen gefaßt; der Boden und der Deckel werden von, mit Leinwandstreifen verbundenem Pappdeckel gemacht; auf dem Seitenkästchen mit den 4 Fächern noch ein besonderer Klapp-Deckel von Pappe angebracht, der Raum des Kastens mit einem Gemenge von $^3/_4$ Theilen trockner Kleie und $^1/_4$ dito Sandes dicht gefüllt, und der Deckel mit einem beweglichen Haken am Rahmen befestiget.

Endlich gehören zu diesem Apparate noch einige Hunderte von Nadeln mit großen runden Köpfen, und eben so viele mit kleineren runden Köpfen. Die sich hierzu am besten eignenden Nadeln sind gelbe rundköpfige Pinnen, welche unter dem Namen der »Färbernadeln« wohl allgemein bekannt sein werden; die Färber und die Tapezierer gebrauchen sie häufig, erstere zur Anheftung der zu färbenden Zeuge, letztere zur Befestigung der Unterzüge bei Sophas, gepolsterten Stühlen u. dgl. — Diese Nadeln brauchen nur 6 — 8 Linien lang, der Knopf der großen 1 bis $1^1/_2$ Linien, der der kleinen $^3/_4$ bis 1 Linie dick, die Nadel selbst, mit einer rundlichen Spitze versehen, nur $^1/_2$ Linie dick zu sein. — Zum Gebrauch bewahrt man die Nadeln in zwei Schächtelchen oder Kästchen, oder legt sie gesondert in zwei der Seitenkästchen an der Tafel.

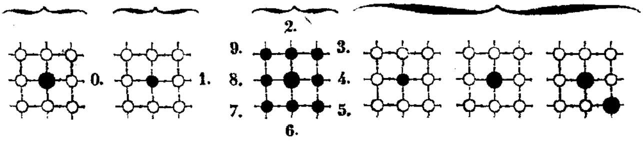
Anwendung der Tafel zur Bezeichnung der Zahlen, Zeichen und Buchstaben.

1. Die Zahlen.

Zu jeder Zahl gehören drei sich durchkreuzende Parallellinien mit 9 Löchern. In das mittlere Loch steckt man eine große Nadel (s. Fig. 1), (also in das zweite Loch der zweiten Linie von oben und von links anfangend); dann bleiben zwei Löcher offen; in das 5te von links, in der 2ten Reihe von oben, steckt man die zweite große Nadel, dann weiter in das 8te, 11te, 14te u. s. w. in derselben Reihe; eben so von oben herab, so daß zwischen je zwei großen Knöpfen 2 freie Löcher sich befinden. Diese Knöpfe allein stehend, bezeichnen die Stellung der Zahlen im horizontalen und vertikalen Werthe; sie werden zu berechnenbaren Nullen durch ihre mittelst anderer Zahlen ihnen gegebenen Stellung und Bezeichnung; man läßt sie während und nach dem Gebrauche der Tafel auf ihrer Stelle, und vertauscht sie auf diesem Puncte nur mit einer kleinknopfigen Nadel, um eins auszudrücken (s. Fig. 2). Bei allen übrigen Zahlen bleibt die große Nadel, unverändert in der Mitte stehen. Zur Bezeichnung der Zwei setzt man die kleine Nadel in das Loch über der großen; der Drei in das rechts oben in den Winkel; der 4, rechts zur Seite; der 5, rechts unten in den Winkel; der 6, unter die große; der 7, links unten in den Winkel; der 8, links zur Seite, und der 9, links oben in den Winkel (s. Fig. 3). Zehn wird durch 1 und 0, also links eine kleine Nadel in die Mitte (die große fortgenommen) und in der folgenden Stelle rechts eine Null (große Nadel in der Mitte) ausgedrückt, welcher dann der Werth der »0 Einer« durch eine, der großen Nadel in der dritten Stelle in 5 hinzugefügten großen Nadel gegeben wird (s. Fig. 4). Diese große Doppelnadel, ●5, dient auch zur Bezeichnung des Endes eines jeden Postens.

Die Tafel muß während des Gebrauches stets genau rechtwinklicht vor dem Rechner stehen; dann erkennt dieser mit einem einzigen Fingerdrucke die relative Stellung der Nadeln leicht und sicher.

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.



2. Die mathematischen Zeichen.

Zu den gewöhnlichen Rechnungen mit unbenannten Zahlen; dann auch zu den Rechnungen mit benannten Zahlen, wenn man hiebei die Reihen der Ordnungen nur in bestimmter Folge bearbeitet, und die Benennung der Größen (Thaler — Pfennig;

Centner — Quentchen) in Gedanken behält (wobei man indessen, um Irrthum zu vermeiden, die Benennung dieser verschiedenen Ordnungen anstatt mit Buchstaben, durch ein Paar kleine Nadeln in 2 und 6 ausdrücken kann), bedarf man nur zwei Arten von Nadeln, einer groß- und einer kleingeknopften. —

Die mathematischen Zeichen kann man im gewöhnlichen Rechnen mit großen Nadeln ausdrücken; dann müssen aber die benennenden Buchstaben mit zwei kleinen Nadeln gesteckt werden.

Bei der Algebra kommen aber oft große Buchstaben neben kleinen vor, welche erstere, mit großen Nadeln bezeichnet, leicht Störung und Undeutlichkeit hervorbringen, wenn die mathematischen Zeichen ebenfalls mit großen Nadeln bezeichnet sind. Deshalb wählte Verf. zu den mathematischen Zeichen eine andere Art großer, leicht zu bereitender Nadeln, die Spitznadel (●), deren Stiel $\frac{1}{2}$ Linie über dem Knopfe hervorragt. Auch kann man diese Nadel leicht durch Umbiegen ihrer Spitze in eine Hakennadel (●) verwandeln. Hat man von jeder dieser beiden Arten etwa 100 Stück vorräthig, dann ist man im Stande, die schwierigsten algebraischen Rechnungen mit Zahlen, großen und kleinen Buchstaben, Zeichen und Potenzen aller Art auszuführen. Man setzt die Zahlen auf die gewöhnliche Art, mit einer großen Primitivnadel und einer kleinen Nadel; die großen Buchstaben mit der großen Primitivnadel und 2 großen Nadeln (bei diesen muß aber ein genaues Nachfühlen nach den Primitivreihen, und somit Erkennen der Primitivnadel, die Erkennung des Buchstabens schaffen); die kleinen Buchstaben mit einer großen Primitivnadel und 2 kleinen Nadeln; die mathematischen Zeichen mit einer großen Primitivnadel und Spitznadeln; und die Potenzen, sowohl in Zahlen als Buchstaben ausgedrückt, mit Hakennadeln. Auf diese Weise ist jedem Irrthume und jeder Undeutlichkeit vorgebeugt.

Bei allen mathematischen Zeichen bleibt, wie bei den Zahlen und Buchstaben, der glatte Primitivknopf in der Mitte des Quadrates stehen, um die horizontale und vertikale Linie, durch sie die relative Stellung der hinzugefügten Nadeln zu bezeichnen. Man fügt hinzu zur Bezeichnung der

Addition, eine Spitznadel in 8; also ${}_{8}\bullet = +$

Multiplication, eine Spitznadel in 6; also $\underset{6}{\bullet} = \times$

Subtraction, eine Spitznadel in 4; also $\bullet_{4} = -$

Division, eine Spitznadel in 2; also $\overset{2}{\bullet} = :$

Das Trennungs- und End-Zeichen ist eine große glatte Nadel in 5, also $\bullet_{5}$ = leerer Raum.

Der senkrechte Theilungsstrich ist: zwei Spitznadeln in 2 und 6; also $\overset{2}{\underset{6}{\bullet}} = |$

Der Bruch-Theilungsstrich ist: zwei Spitznadeln in 2 und 7; also ${}_{7}\bullet^{2} = /$

Die Klammer oder Parenthese ist: zwei Spitznadeln in 9 und 7, desgleichen in 2 und 5; also: ${}^{9}_{7}\bullet$; $\bullet^{2}_{5} = (\ )$

Das Zeichen der Gleichheit: zwei Spitznadeln in 8 und 4; ${}_{8}\bullet_{4} = =$

Das Zeichen der Gleichheit und Aehnlichkeit: drei Spitznadeln in 2, 4 und 8; ${}_{8}\overset{2}{\bullet}_{4} = \cong$

Das Zeichen des Winkels: zwei Spitznadeln in 2 und 4; $\overset{2}{\bullet}_{4} = \angle$

Das Zeichen des Quadrates: drei Spitznadeln in 2, 3 und 4; $\overset{2\;3}{\bullet}_{4} = \square$

Das Zeichen der Wurzel: zwei Spitznadeln in 3 und 6; $\underset{6}{\bullet}^{3} = \sqrt{}$

Die Bezeichnung der Potenzen siehe weiter unten bei dieser Rechnungsart.

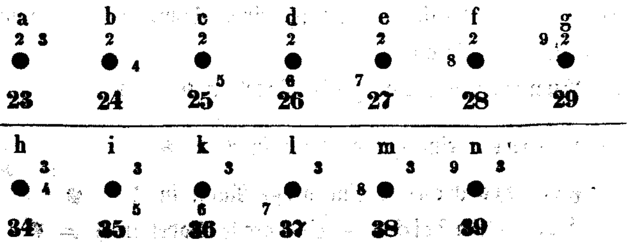
3. Das Buchstaben-System oder die quadratische Schrift.

Jeder Buchstaben wird durch zwei, dem großen, immer unverändert stehen bleibenden Primitivknopfe hinzugefügte, glatte Nadeln ausgedrückt; die großen Buchstaben werden mit 2 großen, die kleinen mit 2 kleinen Nadeln bezeichnet.

Zur Bezeichnung von a, b, c, d, e, f, g kommt eine Nadel in 2, die zweite für a in 3, für b in 4, für c in 5, für d in 6, für e in 7, für f in 8 und für g in 9. — Zur Bezeichnung von h, i, k, l, m, n kommt eine Nadel in 3, die zweite für h in 4, für i in 5, für k in 6, für l in 7, für m in 8 und für n in 9. — Zur Bezeichnung von o, p, q, r, s kommt eine Nadel in 4, die zweite für o in 5, für p in 6, für q in 7, für r in 8 und für s in 9. — Zur Bezeichnung von t, u, v, w kommt eine Nadel in 5, die zweite für t in 6, für u in 7, für v in 8 und für w in 9. — Zur Bezeichnung von x, y und z kommt eine Nadel in 6, die zweite für x in 7, für y in 8 und für z in 9. — ä und ö haben eine Nadel in 7, die andere in 8 und 9; ü hat eine in 8, die andere in 9.

So entsteht aus dieser Combination unser deutsches Buchstabensystem von 28 Chiffern ganz einfach und natürlich; mit diesen zwei Nadeln läßt sich keine neue Stellung hervorbringen. Will man noch für die Laute ch, sch und j Bezeichnungen geben, dann darf man nur eine dritte Nadel hinzufügen; z. B. ch = 243; sch = 945; j = 345.

Zur Verdeutlichung mag folgende Uebersicht dienen, welche die Buchstaben in ihrer Entwickelung aus dem Zahlensysteme darstellt:



o	p	q	r	s
● 4 5	● 4 6	7 ● 4	8 ● 4	9 ● 4
45	46	47	48	49

t	u	v	w
● 6 5	● 7 5	8 ● 5	9 ● 5
56	57	58	59

x	y	z
● 7 6	8 ● 6	9 ● 6
67	68	69

ä	ö	ü
8 ● 7	9 ● 7	9 8 ●
78	79	89

Das Lesen und Schreiben mit diesen Buchstabenbezeichnungen auf unserer Tafel wird auf eine leichte und einfache Weise ausgeführt. Der Schüler lernt zunächst die Zahlen, dann die einzelnen Buchstaben nach ihrer systematischen Entwickelung kennen; jedem Buchstaben wird von Anfang an die ihm entsprechende Doppelzahl gegeben, so daß diese und der Laut des Buchstabens dem Zöglinge eben so geläufig werden, als uns das Zeichen und der Namen des Buchstabens. Nun werden Sylben, Wörter und Sätze gesteckt und gelesen.

Die Interpunction ist ebenfalls keinen Schwierigkeiten unterworfen. Alle Interpunctionszeichen werden durch Hinzufügung einer großen Nadel zu der unverändert stehen bleibenden Primitivnadel gebildet. (Noch größere Deutlichkeit wird diesen Zeichen durch Anwendung einer Spitz- oder Hakennadel.)

Zur Bezeichnung

des Punctums . eine große Nadel in 6 = ● 6

— Kolons : eine große Nadel in 2 = ● 2

— Fragezeichens ? eine große Nadel in 3 = ● 3

— Gedankenstrichs — eine große Nadel in 4 = ● 4 des Komma's , eine große Nadel in 5 = $\underset{5}{\bullet}$

— Semikolons ; eine große Nadel in 7 = $\underset{7}{\bullet}$

— Abbrechungszeichens = eine große Nadel in 8 = $_{8}\bullet$

— Ausrufungszeichens ! eine große Nadel in 9 = $\overset{9}{\bullet}$

der Parenthese () zwei gr. N. in 9 u. 7, 3 u. 5 = $\overset{9}{\underset{7}{\bullet}}\ \overset{3}{\underset{5}{\bullet}}$

Zur Bezeichnung der Trennung zwischen zwei Worten bleibt ein Primitivknopf frei.

Die großen Buchstaben können mit zwei großen Nadeln bezeichnet werden; jedoch ist hier ein genaues Befühlen der horizontalen und vertikalen Reihen, zur Erkennung des Primitivknopfes, nöthig; deshalb ist es nicht unzweckmäßig, beim Schreiben und Lesen die großen Buchstaben durch zwei Spitznadeln, dann aber die Interpunctionszeichen mit glatten Großknöpfen auszudrücken.

Somit wird diese Tafel ein sicheres und leichtes Hülfsmittel zur Erlernung der schwierigen Orthographie unserer Muttersprache, indem der blinde Zögling selbst schreibt, und das Geschriebene willkürlich wiederlesen kann, ohne künstliche Buchstaben mühsam und meistens undeutlich schreiben gelernt zu haben, welche er, auf die gewöhnliche Art ausgeführt, doch nachher nicht selbst wiederlesen kann.

Auch die französische Sprache kann auf dieser Tafel eingeübt werden. Bei der großen Abweichung der Aussprache der Wörter von der Schreibart derselben ist zur Erlernung der französischen Sprache durchaus ein öfteres Schreiben und Wiederlesen des Geschriebenen dringend nothwendig. — Das Buchstabensystem ist übereinstimmend mit dem bisher entwickelten; wir gebrauchen hier aber nicht die Doppelvokale ä, ö, ü = **78, 79, 89**; das j (i consonne) können wir daher als 89 bezeichnen, oder behalten obige Bezeichnung **345** bei. — Zur Bezeichnung der Accente, des Circumflexes, Tréma's, Cédille, Apostrophs und des Tiret's eignen sich folgende deutliche Bezeichnungen:

Accent aigu auf é, eine Spitznadel in 3.

— grave auf à und è, eine Spitznadel in 9, in dem zu diesem Buchstaben gehörenden Quadrate.

2*

Circonflexe auf â, zwei Spitznadeln in 9 und 4.
— auf ê, zwei Spitznadeln in 9 und 3.
— auf î, zwei Spitznadeln in 9 und 2.
— auf ô und û, zwei Spitznadeln in 9 und 3, im Quadrate des Buchstabens.

Tréma auf ë, ü, ö, zwei Hakennadeln in 9 und 3.
— auf ï, zwei Hakennadeln in 9 u. 2, im Quadr. d. B.

Cédille, eine Hakennadel in 7, im Quadrate d. Buchst.

Apostrophe vor a, e, i, o, u, h und y, eine Hakennadel in 9, im Quadrate d. Buchst.

Tiret, wie ein Abbrechungszeichen, eine Spitznadel in 8, im Quadrate d. Buchst.

Die englische Sprache macht für diese Tafel keine Schwierigkeiten, da keine Accente gebraucht werden; das Tiret wird mit einer Spitznadel in 8; das selten vorkommende Trema auf ä, ï, ö mit zwei Hakennadeln in 9 und 3 bezeichnet.

Bei der italienischen Sprache haben viele neuere Autoren angefangen, alle Accente, bis auf den Acc. grave, zu verbannen; indessen gewähren der Acc. acuto und der circonflesso größere Deutlichkeit.

Der Acc. acuto auf á und í, eine Spitznadel in 4.
— — — auf é, ó und ú, eine Spitznadel in 3.
— — grave auf à, è, ì, ò, ù, eine Spitznadel in 9.
— — circonflesso auf â, zwei Spitznadeln in 9 und 4.
— — — auf ê, ô, û, zwei Spitzn. in 9 u. 3.
— — — auf î, zwei Spitznadeln in 9 und 2.

Der Apostropho vor 'a, 'e, 'i, 'o, 'u, eine Hakennadel in 9.

Der Apostr., der anstatt eines elidirten Vokales am Ende eines Wortes, vor einem Consonanten steht (z. B. de' sensi, vo' fate, a' miei, io' l credo, ch' ad un' descritti, m' hai, e' n,) wird durch eine dem ersten Worte, also dem Quadrate des letzten Buchstabens desselben rechts, angehängte Hakennadel ausgedrückt; bei a', i', k', l', m', n', setzt man eine Hakennadel in 4; bei h' in 5; bei e', o' und u' und den übrigen Consonanten in 3.

Auch zum Hochdruck (Preßschrift) hat Verf. dieses Buchstabensystem angewendet, und ist dabei der nicht unerhebliche Vortheil, daß anstatt 28 einzelner gegossener Metall-Typen, deren nur acht nöthig sind, da durch Axendrehung des Cubus aus der Type a das o, x und ü; aus b das p, y und f; aus c das q, z und m; aus d das r; aus e das s, k und v; aus g das h, t und ä; aus i das u, ö und n, und aus l das w entsteht. Anstatt des großen Knopfes in der Mitte (Primitivkn.) hat Verf. der größeren Deutlichkeit wegen hiebei das Zeichen des Sternes substituirt. Ebenso bedürfen wir zum Hochdruck der Zahlen dieses Systemes anstatt 10, nur 4 Typen; der Stern in der Mitte = 0, der Punkt in der Mitte = 1; Punkt an der Seite des Quadrates = 2, 4, 6 und 8; an dem Winkel des Quadrates = 3, 5, 7 und 9. Mithin besteht der Druckapparat zur quadratischen Preßschrift aus 12 Typen (der mit gewöhnlicher Schrift aus 38), wozu nur noch die gewöhnlichen Interpunctionszeichen und die nöthigen Spatien gehören. — Ein Typenkasten mit gewöhnlicher Schrift muß zum Satze einer mäßigen Folioseite (circa 320—330 Buchstaben, 58—60 Worte, in 15 Reihen enthaltend) an 1000 bis 1100 Typen enthalten, während ein Typenkasten mit quadratischer Schrift nur 300 bis 350 Stück zu gleichem Zwecke zu enthalten braucht.

Das Erlernen dieser quadratischen Preßschrift macht fast weniger Schwierigkeiten, als das der gewöhnlichen Schrift, da Uebungen auf der Tafel es selbst einem schwachen Zöglinge sehr erleichtern.

Anwendung der Tafel bei den verschiedenen Rechnungsarten.

I. Die einfachen Zahlen; das dekadische Zahlensystem; das Numeriren.

Kenntniß der einzelnen natürlichen Zahlen; des dekadischen Zahlensystemes; des Gesetzes der geordneten Zusammenstellung der Zahlen, als Einer, 10ʳ, 100ʳ, 1000ʳ u. s. f. Uebungen im Aussprechen der Zahlengrößen nach gegebenen Ziffern.

Jede mehrstellige Zahl wird auf der Tafel durch das Zeichen des Endes (● 5, glatter großer Knopf in 5) begrenzt; denn ohne diese Bezeichnung erhalten die folgenden Primitivknöpfe den Werth der Nullen nach dem dekadischen Systeme.

II. Einfache Rechnungsarten mit ganzen unbenannten Zahlen.

1. Addition.

Sie wird in dem rechten, oberen Winkel der Tafel ausgeführt. Man beginnt in der oberen Reihe; zählt zuvor nach dem numerischen Werthe die Anzahl der Stellen von rechts nach links an den Primitiv-Nadeln ab, und setzt nun die Zahl von links nach rechts nach der bestimmten Ordnung, jeder Primitiv-Nadel die bezeichnende kleine Nadel hinzufügend (für **0** bleibt die Primitiv-Nadel frei), indem der Mittelfinger der linken Hand die zuletzt gesetzte Zahl festhält, und der Zeigefinger dieser Hand der, in der rechten Hand geführten kleinen Nadel, die folgende Zahlstelle bezeichnend, entgegenkommt. So können zwei und mehrere Posten (auf unserer Quart-Tafel **12** Posten, jede von **20** Stellen) gesetzt werden. Anstatt des, die Posten von dem Facit trennenden Striches, bleibt eine Reihe Primitiv-Nadeln frei; in der Reihe darunter setzt man, den Vertikalreihen entsprechend, das Facit. Die linke Hand beginnt mit Zeige- und Mittelfinger von oben herab die Addition; indem der Mittelfinger auf der eben summirten Zahl verharrt, nimmt der Zeigefinger die darunter folgende vor. An dem freien Knopfe (in der Linie) angelangt, bleibt der Zeigefinger auf diesem liegen; die rechte Hand setzt die Facitzahl eine Reihe tiefer, unter diesem Knopfe. Den Rest zur höheren Ordnung behält man entweder in Gedanken, oder steckt ihn, bei größeren Zahlen, in der Linienreihe an dem nach links hin folgenden (höheren) Knopfe an, (nimmt aber säpter beim Aufwärtssteigen zur Linken diesen dann verbrauchten Rest stets hinweg). Die linke Hand zieht nun von unten herauf in der folgenden höheren Ordnung; oder man addirt von unten aufwärts, und fährt dann zum Facitsetzen wieder herab. — Daß hier die Probe der Subtraction leicht zu veranstalten ist, bedarf keiner Erwähnung.

2. Multiplication.

Sie wird ebenfalls rechts oben ausgeführt. Aufsatz: Obere Reihe: Multiplicandum; zweite Reihe darunter: Multiplicator; dritte Reihe: frei, als Strich; in der vierten und in den folgenden Reihen darunter: Product; hat dieses mehrere zu addirende Ordnungen, dann bleibt zwischen diesen und dem nun addirten Producte wiederum eine Knopfreihe, = Linie, offen. — Der linke Mittelfinger bleibt auf dem Multiplicandum, der linke Zeigefinger oder Daumen fixirt die zu besetzende Stelle; die rechte Hand setzt die Productzahl an. Ein plus für die höhere Ordnung wird entweder (wie die jedesmalige Zahl des Multiplicators) in Gedanken behalten, oder an dem vertikal entsprechenden Linienknopfe angesteckt, und nach dem Verbrauche gehoben. — Die Probe der Division ist leicht ausführbar.

3. Subtraction.

Auch sie wird rechts oben ausgeführt. Aufsatz: erste Reihe: Subtrahendum (Minuendum) nach dem numerischen Werthe; zweite Reihe darunter: Subtractor, ebenso; dritte Reihe bleibt frei als Trennungsstrich von der Differenz. — Der linke Mittelfinger lieset die Zahl des Minuends, der linke Zeigefinger die des Subtractors, der linke Daumen fixirt die entsprechende Vertikalreihe in und unter der Linie; die rechte Hand setzt die Zahl der Differenz an ihren Ort. Wird von einer Zahl der höheren Ordnung geborgt, dann fixirt diese der linke Mittelfinger, während der linke Zeigefinger die Zahl des Subtractors, und somit die Vertikalreihe, festhält; wird nicht geborgt, dann rücken beide Finger zugleich zur höheren Ordnung. — Die Probe der Addition ist leicht ausführbar.

4. Division.

Sie wird im linken oberen Winkel ausgeführt. Aufsatz: in der oberen Reihe zuerst der Divisor; dann das Zeichen der Division (● 2); in fortlaufender Reihe dahinter das Dividendum, dann der Theilungsstrich (2 ● 6), hinter welchem nun der Quotient angelegt wird. Die Arbeit beginnt von links; linker Mittel- und Zeigefinger begrenzen die Zahlgrößen, die rechte Hand steckt die neuen Zahlen. Man steckt das erste Quantum des Dividendums nochmals (in den entsprechenden Vertikalreihen) unverändert in der nächsten Reihe darunter, damit das ganze Dividend unverändert bleibt. Man sucht nun den sichern oder vermutheten Quotienten, multiplicirt das herabgeholte Dividend mit diesem, und setzt dieses Product in die dritte Reihe unter das Dividend-Quantum; ist es richtig, dann steckt man den Quotienten hinter den Theilungsstrich, und subtrahirt nun vom Dividendquantum, indem man dieses durch Aenderung der Nadeln sogleich in den Rest verwandelt, zu welchem man nun die zum zweiten Dividendquantum nöthigen Zahlen herabholt. — Bei kleinen Zahlen braucht das Multiplications-Product nicht in der dritten Reihe angesteckt zu werden; der Geübte subtrahirt, den Subtractor im Kopfe behaltend. Ist, bei größern Divisoren, der im Kopfe geschätzte Quotient nicht richtig, dann zieht man das Multiplications-Product wieder weg, und beginnt die Multiplication nun mit dem richtigen Quotienten. Auch kann man, bei größeren Divisoren, rechts unten auf der Tafel die Multiplicationen zur Auffindung der Quotienten ausführen. — Endet der Quotient mit einem Bruche, dann wird dieser dahinter angelegt (s. u. Brüche). — Bei kleinen Divisoren wird die Division ganz im Kopfe ausgeführt, oder nur der Rest in der entsprechenden Reihe angesteckt. — Alle verbrauchten Zahlen werden sogleich wieder fortgenommen; nur Divisor, Dividend und Quotient finden sich nach gelöseter Rechnung auf der Tafel.

5. Kennzeichen der Primzahlen und der componirten Zahlen, der Theiler rc.

Die Kenntniß der Eintheilung der Zahlen in Prim-, zusammengesetzte und verwandte Zahlen; ferner des gemeinsamen Maaßes; des Generalnenners; die der Kennzeichen der hebenden Factoren; des dekadischen Bildes; der Eigenthümlichkeit der 3 und 9, und die des Auffindens des größesten und des kleinsten gemeinsamen Theilers zweier und mehrerer Zahlen, muß der Lehre von den Brüchen voraufgehen, und lassen sich die hiezu gehörenden Uebungen auf unserer Tafel leicht anstellen. Wer die vier Grundrechnungen nach obiger Angabe geübt hat, wird die Kunstgriffe, welche diese Vorübungen der Brüche auf der Tafel fordern, leicht auffinden. Die Bezeichnungen der Addition, Gleichheit, Multiplication, Subtraction und Division, wie die des Endes, müssen fest geübt sein.

Zur Erläuterung mögen folgende Beispiele dienen:

1) Auffinden des größesten gemeinschaftlichen Theilers:

```
          ↓     ●
-   133   ●  380  ●  2
             266  ●              19 | 133 =  7
          ●  ●  ●                               also 7/20.
                                 19 | 380 = 20
                ↓     ●
          114   ●  133  ●  1
                   114  ●
                ●  ●  ●
                      ↓     ●
                19    ●  114  ●  6
                         114  ●
```

Die Bezeichnung der unwesentlichen Quotienten ist unnöthig; wir bedürfen daher auf unserer Tafel zu diesem Beispiele nur zwei Reihen. Aufsatz: 133 ● 380; im Kopfe 2 × 133 = 266; 266 unter 380, abgezogen, aus 266 sogleich 114 gemacht; diese nun nochmals unter 133 gesetzt, abgezogen, aus ihr der Rest 19 gemacht; dahinter ●; 19 in 114 geht auf, 6 mal; also 19 der gemeinschaftliche Theiler.

2) 255 | 3780. Die Ziffernsumme 12 und 18 ist durch 3 theilbar = 85 und 1260; aber auch durch 5 = 51 und 756, diese wiederum durch 3 = 17 und 252, als kleinstes Verhältniß des Bruches, aus welchem nun der größeste gemeinschaftliche Theiler dieser Zahlen durch Multiplication der Factoren, mit denen der Bruch dividirt war, gefunden wird, 3 × 5 = 15.

3) Kein gemeinschaftlicher Theiler:

```
      ↓      ●
151   ●  373 ●
      ●      ●
142   ●  302 ●
      ●      ●
  9   ●   71 ●
             ●
          63 ●
           8
```

151 in 373 = 2, Rest 71 in 151 = 2, Rest 9 in 71 = 7, Rest 8 in 9 = 1, also kein gemeinschaftlicher Theiler. Auf der Tafel werden nur drei Reihen vertikal, und 8 Stellen horizontal gebraucht. (S. o. Division, S. 23 u. 24.)

Die Bezeichnung der unwesentlichen Quotienten ist unnöthig.

4) 3759 | 45789. Die Ziffernsumme 24 und 33 durch 3 theilbar = 1253 | 15263; die Ziffernsumme 11 und 17 nicht theilbar, also Division, welche ausgeführt wird, wie oben »Division« gezeigt wurde. Der Rest 227 wird wie in Beispiel 3) behandelt, oder die Division verkürzt ausgeführt; die letzte Zahl ist 9 in 109 = 12, Rest 1, also kein gemeinschaftlicher Theiler; also $^{1253}/_{15263}$.

5) Auffinden des möglichst kleinsten gemeinsch. Dividuus:

	6	8	9	10	14	15	21	35	49
2	~~3~~	4	~~9~~	~~5~~	~~7~~	~~15~~	~~21~~	35	49
3		4	3			~~5~~	~~7~~	~~35~~	~~49~~
7		4	3					5	7

$$2 \times 3 \times 7 \times 4 \times 3 \times 5 \times 7 = 17640.$$

Die gehobenen (durchstrichenen) Zahlen werden auf der Tafel sogleich abgehoben.

III. Einfache Rechnungsarten mit gebrochenen unbenannten Zahlen.

A. Gewöhnliche Brüche.

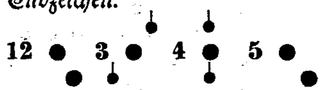
Der Aufsatz der Brüche geschieht in der fortlaufenden horizontalen Reihe von links nach rechts.

I. Einfache Brüche: (z. B. $^2/_5$) zuerst der Zähler, dann Bruchstrich (3 ● 7 mit Spitznadeln), dann der Nenner, und das Zeichen des Endes (● 5) glatt. Z. B. 2 ● 5 ●

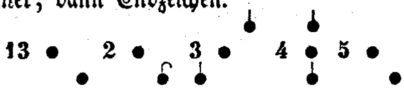
II. Gemischte Brüche: (z. B. $35\,^7/_9$) zuerst die ganzen Zahlen, diese durch das Trennungszeichen (● 5 glatt) geschieden, nun der Zähler des Bruches; dann Bruchstrich; dann der Nenner, und das Zeichen des Endes.

Z. B. 35 ● 7 ● 9 ●

III. **Doppelte Brüche.** 1) Der Zähler ist selbst ein Bruch (z. B. $12\frac{3/4}{5}$); dann zuerst die Ganzen durch Trennungszeichen (● 5 glatt) geschieden; dann der Zähler des Doppelbruches durch Bruchstrich (3 ● 7 Spitzn.) von dem nun folgenden Nenner desselben geschieden; darauf der senkrechte Theilungsstrich (2 ● 6 Spitzn.) und nun der gemeinschaftliche Nenner des Bruches; dann Endzeichen.

Z. B. 

2) Der Zähler ist einfach, und hat neben sich noch einen Doppelbruch (z. B. $13\frac{2\,3/4}{5}$); dann zuerst die Ganzen, Trennungszeichen (● 5 glatt); dann der einfache Zähler, dann eine Hakennadel in 5; nun der Zähler des Doppelbruches, durch Bruchstrich (3 ● 7 Spitzn.) von seinem nun folgenden Nenner geschieden; dann vertikaler Strich (2 ● 6 Spitzn.) und nun der gemeinsame Nenner; dann Endzeichen.

Z. B. 

Zur Uebung des Aufsatzes der Brüche auf unserer Tafel, und als nothwendige Vorübung zu den Rechnungsarten mit Brüchen müssen hier zunächst die Erläuterungen und Uebungen des **Abbrevirens**, **Dilatirens**, **Resolvirens** und **Reducirens** sich anreihen.

1) **Brüche aufheben**, sublevir en, **abbreviren**, abkürzen, heißt: den Zähler und Nenner des Bruches durch die möglichst kleinsten Zahlen ausdrücken. Hier werden Zähler und Nenner mit gleichen Zahlen dividirt. Z. B. $^{20}/_{35} : 5 = {}^{4}/_{7}$; $^{128}/_{144} : 2 = {}^{64}/_{72} : 8 = {}^{8}/_{9}$ (oder durch 4 und 4, oder durch 16); $^{384}/_{576} : 2 = {}^{192}/_{288} : 2 = {}^{96}/_{144} : 12 = {}^{8}/_{12} = {}^{2}/_{3}$ (oder durch 4 und 12, oder durch 192). Auch hilft bei dieser Operation die genaue Kenntniß der Kennzeichen der Theilung durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 und 10, auch wohl durch 11. Z. B. 8634 : 2; 7221 : 3; 4084 : 4; 3415 : 5; 8642 : 6; 2584 : 8; 2467431 : 9; 6780 : 10; 3145692 : 11.

2) **Brüche erweitern**, **dilatiren**, prolongiren, erheben;

heißt: ein kleineres Zahlenverhältniß in einem größeren, dem Werthe nach gleichbleibenden, Zahlenverhältnisse ausdrücken; Verwandlung eines Bruches in einen andern, wobei ein bestimmter Nenner gegeben ist; oder Verwandlung eines Bruches in eine gegebene Zahlbenennung. Hier werden Zähler und Nenner mit gleicher Zahl multiplicirt. Z. B. $^3/_5$ erweitert durch 7 $= {}^{21}/_{35}$; $^9/_{17}$ durch 15 $= {}^{135}/_{255}$.

Auf der Tafel: 15 9 17 135 255

3) Brüche auflösen, resolviren, heißt: Theile höherer Ordnungs-Einheiten in niedrigere Ordn. Einheiten auflösen; Zahl und Bruch kommen unter andere Benennungen; die Zahlen werden kleiner, der Werth des Bruches bleibt derselbe; z. B. $\frac{^3/_4}{100} = 75$; $\frac{^7/_8}{60} = 52\frac{1}{2}$. Bei benannten Zahlen wird der Zähler mit der niedrigeren Benennung, in welche der Bruch verwandelt werden soll, multiplicirt, das Product durch den Nenner getheilt; z. B. $^5/_8$ ℛ in Pfennige resolvirt = 180 ₰ ꝛc.

4) Brüche zurückführen, reduciren, heißt: Theile niedrigerer Ordnungen auf höhere Ordnungen zurückführen. Z. B. 5 Pfennige zum Thalerbruche $= {}^5/_{288}$ ℛ; 6 Loth zum Centnerbruche [à 110 ℔] $= {}^3/_{1760}$ Ctr. Die niedrigere Ordnung wird als Zähler, die höhere als Nenner in Zahlen ausgedrückt, und durch einen gemeinschaftlichen Divisor getheilt.

Das Abbreviren und Dilatiren läßt sich gut mit unbenannten Zahlen üben; den Uebungen des Resolvirens und Reducirens legt man sehr zweckmäßig sogleich benannte Zahlen unter. Die Vorübungen müssen im Kopfe ausgeführt werden. Sollen diese Uebungen auf der Tafel mit benannten Zahlen vorgenommen werden, dann ist das Capitel »Rechnen mit benannten Zahlen« (s. w. u.) zunächst vorzunehmen.

1. Addition der Brüche.

Man beginnt links oben, in der zweiten Reihe von oben; in die oberste Reihe setzt man den gefundenen Generalnenner. Zähler und Nenner der verschiedenen Brüche werden, durch

Bruchstrich getrennt, vertikal unter einander gesetzt; da mehrstellige Zähler vorkommen können, fängt man in der vierten Vertikalreihe, von links, an; sind die Nenner gleichnamig, dann braucht nur der obere gesteckt zu werden. Bei solchen Nennern ist die Rechnung nur Addition der Zähler, und Division des Facits durch den Nenner; Rest und Nenner geben den etwanigen neuen Bruch.

Bei ungleichnamigen Brüchen sucht man zuerst den Generalnenner; man zieht die gemeinschaftlichen Factoren aus den Nennern, und multiplicirt die neuen Quotienten mit einander. Rechts oben auf der Tafel steckt man horizontal die Nenner; sind diese alle einstellig, dann läßt man zwischen je zweien einen leeren Primknopf; sind einige mehrstellig, besonders mit Nullen, dann scheidet man sie alle durch das Trennungszeichen (● 5 glatt) von einander. Man hebt, zieht die gehobenen Zahlen sogleich fort, multiplicirt, setzt den gefundenen Generalnenner über die Bruchaufgabe, und räumt die Tafel zur rechten Hand wieder auf. Nun wird hier der Generalnenner neu aufgesteckt, mit den einzelnen Nennern dividirt, und dieser Quotient mit dem entsprechenden Zähler multiplicirt; das so gefundene Product wird in der Horizontalreihe neben den Bruch gesteckt. Man addirt vertikal, dividirt das daruntergesetzte Facit durch den Generalnenner horizontal, verkleinert die Zahlen möglichst, sucht den gemeinschaftlichen Theiler 2c. und setzt den Bruchrest frei links unter die Aufgabe, addirt die etwaigen Ganzen + der aus der Addition der Brüche entstandenen, und setzt diese vor den Bruch.

117810   7 • 5 • 9 • 5 • 17 • 110 •

Z. B. $3\,{}^5/_7$ • 84150 $7 \times 9 = 63 \times 17 = 1071 \times 110 =$ 117810

$2\,{}^3/_5$ • 70686

$5\,{}^7/_9$ • 91630   7 : 117810 | 16830

$4\,{}^1/_5$ • 23562   × 5

$2\,{}^9/_{17}$ • 62370

$5\,{}^{17}/_{110}$ • 18207   84150 2c. 2c.

21 •   •

117810 • 350605 • 2

235620 •

114985

$$\begin{array}{r|l} 5:114985 & 22997 \\ 5:117810 & 23562 \end{array}$$

$$23\frac{22997}{23562}$$

$$\begin{array}{l} 565:22997 \mid 40 \\ \quad 2260 \\ \quad\; 397:565 \mid 1 \\ \qquad\; 397 \\ \quad 168:397 \mid 2 \\ \qquad 336 \\ \qquad 61:168 \mid 2 \\ \qquad\; 122 \\ \qquad\; 46:61 \mid 1 \\ \qquad\;\; 46 \\ \qquad\; 15:46 \mid 3 \\ \qquad\;\; 45 \\ \qquad\;\;\; 1 \end{array}$$

Nicht alle diese Zahlen finden sich zuletzt noch auf der Tafel; die Division wird durch Wegnehmen der Nadeln auf einem bei weitem kleineren Raume ausgeführt, wie oben »Division« gelehrt wurde. — Auch kann man die Summe der Ganzen sogleich dem Quotienten (durch Division der Summe durch den Generalnenner gefunden) anhängen = 23; der Bruchrest steht dann darunter.

2. Multiplication der Brüche.

Der Aufsatz geschieht in dem obern mittleren Theile der Tafel; die Mutationen der Brüche werden entweder eine Reihe tiefer entsprechend daruntergesetzt, oder in derselben Linie hinter einem Verticalstriche; die Aufgabe selbst verändere man nicht; die Mutationen aber hebe man stets ab bis auf die zuletzt gültige. Die etwa nöthigen größeren Multiplicationen und Divisionen verrichtet man unten auf der Tafel zur Seite. Zähler werden durch Zähler, und Nenner durch Nenner multiplicirt; der Verkürzung wegen wird gehoben, was hebbar ist.

Z. B. $1\,{}^{3}/_{5} \times 3\,{}^{3}/_{4} \times 9\,{}^{1}/_{7} \times 6\,{}^{1}/_{8} = {}^{336}/_{1}$.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} \times \frac{\overset{16}{\cancel{64}}}{\underset{1}{\cancel{7}}}{}^{8} \times \frac{\overset{7}{\cancel{49}}}{\underset{1}{\cancel{8}}} = 3 \times 16 \times 7 = {}^{336}/_{1}.$$

Die durchstrichenen Zahlen werden, sobald ihr Heber gefunden ist, auf der Tafel weggenommen; die 1 brauchen nicht angesteckt zu werden. Z. B.:

$$5\,{}^{5}/_{6} \times 6\,{}^{2}/_{3} \times 4\,{}^{4}/_{5} = \frac{\overset{7}{\cancel{35}}}{6} \times \frac{20}{\cancel{3}} \times \frac{\overset{4}{\cancel{24}}}{\cancel{15}}{}^{3}$$

$20 \times 4 = 80 \times 7 = 560 : 3 = 186$; Rest 2, also ${}^{2}/_{3}$.

3. Subtraction der Brüche.

Der Aufsatz ist wie bei der Addition; man hebt die hebbaren Zahlen; Nenner und Nenner multiplicirt, geben den Generalnenner; Zähler und Nenner des einen und Nenner und Zähler des andern Bruches multiplicirt, und die Producte von einander abgezogen, geben den Zähler des subtrahirten Bruches.

Z. B. $^{19}/_{53}$ minus $^{7}/_{41}$.

$$41 \times 53 = 2173$$
$$41 \times 19 = 779$$
$$53 \times 7 = 371$$
$$\overline{408/2173.}$$

Man läßt den Aufsatz unverändert stehen, und bearbeitet die Mutationen rechts auf der Tafel.

Z. B. $29\,^{5}/_{12}$ minus $12\,^{5}/_{9}$. Aufsatz unter einander, bleibt unverändert. Die Nenner neben einander rechts auf der Tafel; man hebt hier, wo möglich, den gemeinschaftlichen Factor des einen Nenners heraus, und ändert danach die eine Zahl; also 3 gemeinschaftlicher Factor; mithin $12 \times 3 = 36$; $12 : 36 = 3 \times 5 = {}^{15}/_{36}$; $9 : 36 = 4 \times 5 = {}^{20}/_{36}$. Die $^{15}/_{36}$ setzt man hinter Trennungszeichen dem Minuend, die $^{20}/_{36}$ dem Subtractor ebenso horizontal an; 20 von 15 geht nicht, also 1 von den Ganzen = 36, über 15 gesetzt; $36 + 15 = 51 - 20 = {}^{31}/_{36}$.

$$\begin{array}{rcl}
 & & 36 \\
29\,^{5}/_{12} & \bullet & \cancel{15}\ \bullet \\
 & & 51 \\
\bullet\ \bullet\ 12\,^{5}/_{9} & \bullet & \underline{20}\ \bullet \\
 & & 31\ \bullet \\
36\ \bullet\ \ 16 & & \overline{} \\
 & & 36\ \bullet
\end{array}$$

4. Division der Brüche.

Aufsatz links oben, in der fünften bis sechsten Reihe von links, in der zweiten von oben; bleibt unverändert stehen. Zuerst Divisor, dann Divisionszeichen, dann Dividend, dann Trennungsstrich oder Gleichheitszeichen. Mutationen werden horizontal in derselben Reihe vorgenommen; die Multiplicationen und Divisionen unten, zur Seite der Tafel. Man kehrt den Divisor um, und verfährt wie bei der Multiplication. Z. B.:

$$\begin{array}{rl} & 13\,, \\ 49\,{}^{11}/_{13} : 3000\,{}^{15}/_{17} = & \dfrac{648}{13} : \dfrac{51015}{17}\,, \end{array}$$

$$17 \times 648 = 11016 : 663195 \mid 60\,,$$
$$13 \times 51015 = 663195\,,\,66096$$

$$\begin{array}{r|l} 3 : 2235 & 745\,, \\ \hline 3 : 11016 & 3673\,, \end{array}$$

B. Decimalbrüche.

Die Kenntniß der zehntheiligen Brüche, deren Nenner 10 oder ein Product aus 10 ist, gewährt dem Rechner manche Vortheile. Sie sind Raum ersparend, da die Nenner nicht mit geschrieben werden; sie lassen sich wie ganze Zahlen behandeln; sie werden durch angehängte Nullen gleichnamig gemacht, und endlich durch Versetzung des Decimalzeichens werden sie durch jede dekadische Zahl multiplicirt und dividirt. Die Reste bei Wurzelausziehungen lassen sich nur durch einen Decimalbruch ausdrücken. — Logarithmen s. w. u.

Die Einer (Ganze, oder wo sie fehlen, 0) werden von den folgenden Zehnern, 100 ten, 1000 ten, 10000 ten u. s. f. durch ein Komma (●5) getrennt; (z. B. 4 , 86326..; 357 , 908205..; 0 , 007157...)

Die Addition und Subtraction fordern nur genauen Aufsatz; Behandlung s. o. S. 22 und 23.

$$\text{Z. B.}\quad \begin{array}{r} 3{,}5422028 \\ +\,5{,}7335707 \\ \hline 9{,}2757735 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}0501273 \\ -\,0{,}1759798 \\ \hline 0{,}8741475 \end{array}$$

Die Multiplication mit 10, 100, 1000 u. s. f. fordert nur das Herabrücken des Decimalzeichens nach den entsprechenden Decaden; z. B.:

$$2{,}3450 \times 10 = 23{,}450 \times 100 = 2345{,}0\,..\ \text{ꝛc.}$$

Bei der Multiplication von zwei Decimalbrüchen giebt man dem Producte so viel Decimalstellen, als die Summe der Decimalstellen beider Factoren ausmacht; z. B.

$$\begin{array}{r} 5{,}780 \\ \times\,3{,}40 \\ \hline 19{,}65200 \end{array}$$

Die Endnullen werden bei der Multipl. nicht berücksichtiget, zuletzt nur angehangen.

732,78	732,78	732,78
× 3,0	× 0,3	× 0,03
2198,340	219,834	21,9834

Die verkürzte Multiplication wendet man hier mit Vortheil an, wenn man das Product der Multiplication von zwei Decimalbrüchen nur auf eine geringe Zahl von **5** bis **6** Stellen zu wissen braucht, wo die ganz ausgeführte Multiplication **12** bis **13** Stellen giebt.

z. B. 3,576005	3,576005
× 0,050736	× 0,050736
0,181432189680	0,.....0
	0
	178801
	...0
	2503
	107
	21
	0,181432

Die Division mit **10**, **100**, **1000** rc. fordert nur das Hinaufrücken des Decimalzeichens nach den entsprechenden Decaden; z. B. **22,3450 : 10 = 2,23450 : 100 = 0,022345** rc. Die Division eines Decimalbruches durch einen andern Decimalbruch fordert nur genaue Berücksichtigung des Decimalzeichens. Bei mehrstelligen Decimalbrüchen wird, wenn das Dividendum mehrstellig ist, in diesem das Komma um die Zahl der Stellen im Divisor herabgerückt; ist das Dividendum kleiner, dann wird es durch angehängte Nullen dem Divisor gleichstellig gemacht.

z. B. **5,738, : 0,730, | 0,1272220 . . .**

5,7385 : 0,73 = 5,7385 : 0,7300 | 0,12721 . . .

Die verkürzte Division wendet man hier an, wenn man den Quotienten nur in wenigen Stellen sucht.

z. B. 3,716048 :	7,632035	2,0538 . . .
371605 :	199939	
37160 :	185800	
3716 :	14139	
372 :	2991	
	15	

Die Umwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Decimalbruch ist Division des Zählers durch den Nenner. Die Division geht vollständig auf, und giebt den rationalen Decimalbruch (z. B. $^5/_8 = 0{,}625$); oder der Decimalbruch wiederholt sich in ein= bis achtstelligen Perioden, d. i. der periodische, 1, 2 bis 8stellige Decimalbruch (z. B. $^5/_9 = \overset{1}{0},5555\ldots$; $^{79}/_{300} = \overset{2}{0},26333\ldots$; $^3/_{11} = \overset{2}{0},272727\ldots$; $^4/_{27} = \overset{3}{0},148148\ldots$; $^5/_7 = \overset{5}{0},71425714\ldots$); oder die Division geht gar nicht auf, irrationaler Decimalbruch (z. B. $^{73}/_{2577} = 0{,}028327551455184\ldots$).

Die Umwandlung eines Decimalbruches in einen gewöhnlichen Bruch gelingt völlig bei den rationalen und den periodischen Decimalbrüchen; bei den irrationalen ist der gewöhnliche Bruch oft nur annähernd anzugeben.

Z. B. $0,\overline{625}. = {}^{625}/_{1000} = {}^{125}/_{200} = {}^5/_8.$

$0,\overline{27}27 = {}^{27}/_{100-1} = {}^{27}/_{99} = {}^3/_{11}.$

$0,\overline{148}148.. = {}^{148}/_{1000-1} = {}^{148}/_{999} = {}^4/_{27}.$

$0,2\overline{36}36.. = {}^{236-2}/_{1000-10} = {}^{234}/_{990} = {}^{13}/_{55}.$

$0,26\overline{3}33... = {}^{263-26}/_{1000-100} = {}^{237}/_{900} = {}^{79}/_{300}.$

C. Kettenbrüche

oder continuirliche Brüche, Annäherungsbrüche, wendet man bei Brüchen an, die durch kein gemeinschaftliches Maaß zu verkleinern sind, was stets der Fall ist, wenn Zähler und Nenner Primzahlen unter sich sind. Man dividirt den Nenner durch den Zähler, bemerkt die Ganzen des Quotienten, dividirt mit dem Reste in den vorigen Divisor, und fährt fort, stets mit dem Reste in den vorigen Divisor theilend. Die entstandenen Quotienten geben die Annäherungsbrüche. Unter dem ersten Quotienten bildet man einen Bruch, der ihn selbst zum Nenner, und 1 zum Zähler hat. Diese eben gebildeten Zähler und Nenner multiplicirt man mit dem zweiten Quotienten, addirt den vorhergehenden Zähler und Nenner entsprechend, und fährt fort auf diese Weise. Z. B.:

$$\frac{631}{5879}=\frac{1}{9+\frac{200}{631}}=\frac{1}{3+\frac{31}{200}}=\frac{1}{6+\frac{14}{31}}=\frac{1}{2+\frac{3}{14}}=\frac{1}{4+\frac{2}{3}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2+\frac{0}{1}}$$

$$\begin{array}{r} 5879 \\ 5679 \\ \hline 200 \end{array}\quad \begin{array}{r} 631 \\ 600 \\ \hline 31 \end{array}\quad \begin{array}{r} 200 \\ 186 \\ \hline 14 \end{array}\quad \begin{array}{r} 31 \\ 28 \\ \hline 3 \end{array}\quad \begin{array}{r} 14 \\ 12 \\ \hline 2 \end{array}\quad \begin{array}{r} 3 \\ \hline 1 \end{array}\quad \begin{array}{r} 2 \\ \hline 1 \end{array}$$

Die Quotienten sind

	9	3	6	2	4	1	2
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{19}{177}$	$\frac{41}{382}$	$\frac{183}{1705}$	$\frac{224}{2087}$	$\frac{631}{5879}$

Auch rückwärts läßt sich dieser Kettenbruch in seine einfache Gestalt zurückführen:

$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{2}{3}$; $4+\frac{2}{3}=\frac{3}{14}$; $2+\frac{3}{14}=\frac{14}{31}$; $6+\frac{14}{31}=\frac{31}{200}$; $3+\frac{31}{200}=\frac{200}{631}$; $9+\frac{200}{631}=\frac{631}{5879}$.

Auf der Tafel führen wir es auf folgende Weise aus:

```
              9       3       6      2      4     1     2
    631 :  5879 :  200 :    31 :   14 :    3 :   2 :   1 :
           5679 ·  631 ·   200 ·   31 ·   14 ·   3 ·   2 ·
            200 ·   31 ·   186 ·    3 ·    2 ·   1 ·
                            14 ·
```

oder:

```
    631 :   200 :   31 :   14 :   3 :   2 :   1 :
   5879 ·
      9       3      6      2     4     1     2
```

Die einstelligen Quotienten bedürfen keiner Endzeichen.

Die Multiplication der Quotienten:

```
        9      3      6      2       4       1       2
  0 ·   1 ·    3 ·   19 ·   41 ·   183 ·   224 ·   631 ·
  1 ·   9 ·   28 ·  177 ·  382 ·  1705 ·  2087 ·  5879 ·
```

Zurückführung des Kettenbruches in seine frühere Gestalt:

```
1 : 1 ·· 2 : 4 ·· 3 : 2 ·· 14 : 6 ·· 31 : 3 ·· 200 : 9 ·· 631 ·
    2 ·  3 ·      14 ·      31 ·      200 ·      631 ·      5879 ·
```

$$\frac{217}{389} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}.$$

$$\frac{351}{965} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{87}.$$

Man erhält auch den Zähler eines Annäherungsbruches, wenn man mit dem Nenner des Gliedes, dem er entspricht, den Zähler des vorangehenden convergirenden Bruches multiplicirt, und den Zähler des vor-vorangehenden zum Producte addirt; den Nenner bildet man aus den Nennern der zwei vorangehenden convergirenden Brüche auf gleiche Weise. Z. B. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2}$; bildet man hieraus nach dieser Regel die convergirenden Brüche des Kettenbruches mit Ausnahme der zwei ersten $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{7}$, dann ist der dritte $\frac{5 \times 3 + 1}{5 \times 7 + 2} = \frac{16}{37}$; der vierte ist $\frac{7 \times 16 + 3}{7 \times 37 + 7} = \frac{115}{266}$; und der fünfte ist $\frac{2 \times 115 + 16}{2 \times 266 + 37} = \frac{246}{569}$, welche Brüche man auch auf die gewöhnliche Art der Rückbildung erhält. — Man bedient sich dieser Eigenschaft der Annäherungsbrüche, wenn man für einen gegebenen Bruch, dessen Theile in etwas großen Zahlen ausgedrückt sind, sich annähernde Brüche mit möglichst kleinen Nennern sucht. Z. B. $\frac{113}{355} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{16}$; die convergirenden Brüche sind $\frac{1}{3}$ und $\frac{7}{22}$; es giebt also, außer $\frac{7}{22}$, zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{113}{355}$ keinen Bruch, dessen Nenner kleiner wäre als 355; für $\frac{7}{22}$ kann man auch annähernd $\frac{1}{3}$ substituiren.

Ferner bedient man sich der continuirlichen Brüche zur Reduction der Decimalbrüche in gewöhnliche. Z. B. $\frac{5}{7}$ giebt den periodischen Decimalbruch

$$\begin{array}{llllll}
 & \underbrace{}_{}1 & \underbrace{}_{}2 & \underbrace{}_{}2 & \underbrace{}_{}6 & \underbrace{}_{}1 \text{ ꝛc.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
= 0{,}714285 : 1000000 \\
\qquad\qquad 285715 : 714285 \\
\qquad\qquad\qquad 132855 : 285715 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 20005 : 132855 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 12825 : 20005 \text{ ꝛc.} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 7180
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & 1 & 2 & 2 & 6 \\
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{2}{3} & \frac{5}{7} & \frac{32}{45}
\end{array}$$

Es bedarf nicht einmal der ganzen Periode; nehmen wir z. B.

$\underbrace{1}\ \ \underbrace{2}\ \ \underbrace{2}\ \ \underbrace{71}\ \ 0$

nur drei Stellen = 714 : 1000

	1	2	2	71
$^0/_1$	$^1/_1$	$^2/_3$	$^5/_7$	

286 : 714
142 : 286
2 : 142

$\underbrace{6}\ \ \underbrace{2}\ \ \underbrace{1}\ \ \underbrace{584}\ \ \underbrace{9}\ \ 0$

Z. B. $^3/_{19}$ = 0,15789 : 100000
5266 : 15789
5257 : 5266
9 : 5257
1 : 9

	6	2	1	584
$^0/_1$	$^1/_6$	$^2/_{13}$	$^3/_{19}$	

Nehmen wir nur drei Stellen in Berechnung, dann giebt es in der dritten Stelle dasselbe Resultat:

$\underbrace{6}\ \ \underbrace{2}\ \ \underbrace{1}\ \ \underbrace{2}\ \ \underbrace{2}\,\underbrace{2}\,\underbrace{3}\ \ 0$

157 : 1000
58 : 157
41 : 58
17 : 41
7 : 17
3 : 7
1 : 3
0

	6	2	1	2
$^0/_1$	$^1/_6$	$^2/_{13}$	$^3/_{19}$	

Z. B. $^{15}/_{33}$ = 0,4545. Im Kettenbruche entstehen die Quotienten: 2. 4. 1. 181. 0; daraus gebildete gemeine Brüche: $^1/_2$. $^4/_9$. $^5/_{11}$ = $^{15}/_{33}$.

Z. B. $^{27}/_{153}$ = $^3/_{17}$ = 0,176470; daraus die Quotienten: 5. 1. 2. 5882. 0; daraus: $^1/_5$. $^1/_6$. $^3/_{17}$ = $^{27}/_{153}$.

Die Anwendung der Kettenbrüche bei Lösung von diophantischen Gleichungen, s. u. »Gleichungen.«

IV. Einfache Rechnungsarten mit ganzen und gebrochenen benannten Zahlen.

Münzen, Maaße und Gewichte werden mit Abbreviaturen bezeichnet. Wir bedienen uns hier der Buchstaben, deren System oben S. 17 entwickelt wurde. Um jedem Irrthume vorzubeugen, werden bei dem gewöhnlichen Rechnen alle Buchstaben mit zwei kleinen Nadeln gesetzt. Die zweckmäßigsten Abkürzungen sind für:

Achtel = ah	Gutergroschen = g od. gg	Mariengroschen = m
Anker = ak		Mark = mk
April = ap	Grot = gt	Markbanco = mb
August = ag	Heller = hl	Markcourant = mc
Ballen = bl	Himpten = hp	Markgold = mg
Bogen = bg	Jahr = ir	Marksilber ms
Buch = bc	Januar = ia	Mattier = ma
Buchstaben = bt	Juli = il	Meile = ml
Centner = ct	Juni = in	Metze = mtz
Cubik = cb	Kanne = kn	Million = mll
December = dc	Karat = kr	Minute = me
Dreier = de	Klafter = kf	Monat = mt
Decher = dh	Kreuzer = kz	Morgen = mgn
Drachme = dm	Krz. Münze = km	Nößel = ns
Ducaten = dt	Krz. Währung = kw	November = nv
Dutzend = dz	Kronthaler = kt	October = oc
Eimer = em	Lachter = lh	Ohm = om
Elle = el	Last = la	Oxhoft = ox
Faß = fa	Linie = ln	Pfennig = f od. pf
Februar = fb	Liespfund = lp od. lpd	Pfund = p od. pd
Fuder = fd	Loth = l od. lt	Pf. Sterling = ls
Fuß = fs	Louisd'or = lr	Schiffpfund = spf
Gulden = fl	Mai = mi	Quadrat = qd
Gl. Münze = fm	März = mz	Quartier = qt
Gld. Währung = fw	Malter = mlt	Quentchen = q od. qn
Grad = gr	Maaß = ms	Reichsthaler = rt
Gran = gn	Mäßlein = msl	Rieß = rs
Groß = gs	Mandel = md	Ruthe = rh

Scheffel = sf	Spint = sp	Thaler = t od. r
Schilling = sl	Stein = stn	Tonne = tn
Schock = shk	Stiege = stg	Unze = uz
Schoppen = shn	Stübchen = sbn	Vierfaß = vf od. vl
Secunde = sc	Stück = stk	Wispel = wp
September = sb	Stückfaß = sfs	Woche = wh
Silbergroschen = sg	Stunde = st	Zeile = zi
Skrupel = sk	Tag = tg	Zimmer = zm
Sovereign = so	Terzie = tz	Zoll = zl

Mehrere dieser Abbreviaturen lassen sich noch mehr verkürzen, und durch **einen** Buchstaben ausdrücken. Für Thaler, Gutegroschen und Pfennige bedarf man nur t. g. f.; für Centner, Pfund, Loth und Quentchen: c. p. l. q.; für Jahr, Monat, Woche, Tag, Stunde, Minute und Secunde: j. m. w. t. s. u. n.; Grad, Minute, Secunde: g. m. s.; Meilen, Ruthe, Fuß, Zoll, Linie: m. r. f. z. l.; Ballen, Rieß, Buch, Bogen: b. r. u. o. u. s. w. Ueberhaupt mag der Rechner die Buchstaben-Bezeichnungen nach Belieben kürzen; nur ist jede mögliche Verwechselung und jede zu große Abweichung zu vermeiden.

Beim Rechnen mit benannten Zahlen lasse man links 3 bis 4 Stellen offen, oder rechne der Mitte der Tafel näher, um für erhöhete Produkte Platz zu haben. Kommen Brüche vor, dann fange man in der zweiten Reihe von oben an. Hinter die durch Benennung zu bezeichnende Zahl setze man den oder die zwei Buchstaben, und fahre unmittelbar hinter diesem mit der Zahl der niedrigeren Ordnung fort. Hinter dem letzten Buchstaben braucht das Endzeichen (●5) nicht gesetzt zu werden. Für die höchsten Ordnungen, z. B. Thaler, Centner, Jahr, Meile, Grad, Ballen, Orhoft u. s. w. müssen 3 — 4 Stellen offen bleiben, für die niedrigeren nur zwei. Bei mehreren gleichbenannten Posten unter einander wird in der Vertikalreihe des benennenden Buchstabens jedesmal das Wiederholungszeichen (●5) angelegt. Am Ende, wo Brüche, die mit 0 schließen, kommen können, ist besondere Genauigkeit nöthig; z. B. 5 •. 7 .• 120 •.

1. Resolviren benannter Zahlen.

Die benannten Zahlen werden auf niedrigere und niedrigste Einheit gebracht. Die höchste Einheitszahl multiplicirt mit der

Eintheilungszahl, addirt zu der gleichbenannten Zahl; das Product multiplicirt mit der nächsten Eintheilungszahl, addirt zu der gleichbenannten Zahl u. s. f.

Z. B. 2 Meilen, 1413 Ruthen, 11 Fuß, 10 Zoll, 9 Linien — ? Linien.
(1 Meile = 22848 Fuß; 1904 Ruthen = 1 Meile; 12 Fuß = 1 Ruthe.)

Aufsatz und Ausführung:

2 ml 1413 rh 11 fs 10 zl 9 ln • ln

1904 •	62663 fs
3808 •	125326 •
1413 •	62663
5221 rh	751966 zl
10442 •	1503932 •
5221	751966
62663 fs	9023601 ln

Z. B. 7 St., 13 Minut., 47 Secund., 59 Terzien — ? Terzien.

Aufsatz und Ausführung:

7 st 13 me 47 sc 59 tz • tz

60 •	26027 sc
420 •	1561620 •
13	59
433 me	1561679 tz
25980 •	
47	
26027 sc	

2. Reduciren benannter Zahlen.

Die benannten Zahlen werden auf höhere und höchste Einheit gebracht. Die gegebene Zahl dividirt durch die nächsthöhere Einheit; der Rest ist der übrigbleibende Theil dieser Einheit; der Quotient dividirt durch die nächsthöhere Einheit u. s. f.

Z. B. 9023601 ln ? Meilen, Ruthen, Fuß, Zoll, Linien.

```
                                     1904
12 • 9023601 • 751966 • 62663 : 5221 : 2 ml
           9 •     10 •    11 : 3808 :
                                ----
                                1413 •
```

Z. B. 1561679 ʒ • ſt • me • ſc • ʒ

```
6 • 1561679 : 26027 : 433 : 7 ſt
         59 :    47 :  13 :
```

3. Addition benannter Zahlen.

Je nach den zu berechnenden Größen werden die Columnen angelegt; die Posten genau unter einander gesetzt; in der oberen Reihe der bezeichnende Buchstaben, unter diesem nur das Wiederholungszeichen. Unter den Posten bleibt eine Knopfreihe als Trennungsstrich offen, in der Reihe unter dieser wird das Facit von der kleinsten Ordnung an mit den Buchstaben oder mit dem Wiederholungszeichen angesteckt. Brüche am Ende werden, wie oben gezeigt wurde, unmittelbar hinter, oder etwas tiefer zur Rechten behandelt. Z. B.

```
                                      168 •     3×8×7=168
7287 t 23 g 11 • 2•3 f   112                   3: 168 | 56×2=112
 575 • 21 • 10 • 7•8 •   147                   8: ——  | 21×7=147
 384 • 19 •  9 • 2•7 •    48                   7: ——  | 24×2= 48
 115 •  3 •  5 f
-----------------------------
8363 t 21 g      139•168|307|1
                          139
```

Die Summe **307**, die Differenz **139** und der Quotient **1** werden weggenommen, nachdem vor **168** der Bruchstrich und **139** angesteckt ist; ein f bezeichnet das Ende des Bruches.

4. Multiplication benannter Zahlen.

Hier wollen wir ein etwas schwieriges, aber zur Verdeutlichung der Behandlung unserer Tafel sehr instructives Beispiel vollständig ausführen, dessen Berechnung im Kopfe einige Schwierigkeiten darbietet:

957 ℞ 5 ℳ $4\frac{11/17}{12}$ ₰ $\times 84\,{}^{3}/_{5}$.

Zur vollständigen Ausführung dieser Aufgabe bedarf man einer Tafel von etwa **40** Stellen horizontal und **25** vertikal, also mit **1000** Zahlenstellen, oder **9000** Löchern. (Indessen läßt sie sich auch auf unserer kleinen Handtafel von **21** Stellen horizontal und **14** vertikal, also mit **294** Zahlenstellen, oder **2646** Löchern, recht deutlich und bequem ausführen, wie weiter unten gezeigt werden soll.) Der Aufsatz geschieht in der obersten Reihe von links nach rechts, und fordert **25** Stellen; er bleibt unverändert stehen. Die ersten Multiplicationen werden rechts oben am Rande der Tafel, die Einer in der letzten Vertikalreihe, ausgeführt. Die Berechnung der Aufgabe geschieht in der Mitte der Tafel etwas mehr nach links, in der **2ten** Reihe von oben; in diese kommt der Pfennigbruch, in die **3te** der Groschenbruch und in die **4te** der Thalerbruch; in die **5te** der Thaler-Multiplicator; **6te** Reihe: frei, als Trennungslinie; **7te**, **8te** und **9te** R.: Multiplication; **10te**: freie Linienreihe; **11te**: Multiplications-Product; **12te**: additiver Zähler; **13te**: freie Linienreihe; **14te**: Product und hinter einem Trennungsstriche der Nenner. Links am Rande, etwa in den mittleren Reihen, wird der Generalmultiplicator in einen gleichnamigen Bruch verwandelt, in zwei Reihen unter einander. Dieser kommt nun in die **15te** Reihe; **16te**: freie Linienr.; **17te**, **18te** und **19te**: Multiplication; **20ste**: freie Linienreihe; **21ste**: Product, dahinter Trennungsstrich und der nun sogleich durch Division gefundene Quotient, wie auch späterhin das Resultat der ganzen Berechnung. Die **22ste** und **23ste** Reihe dienen zur Division; der Rest steht zuletzt in der **22sten** Reihe. Vor dieser Division wird das durch Multiplication mit dem Nenner des großen Thalerbruches (**14te** und **15te** Reihe) gefundene Product, welches in der **16ten** Reihe ausgeführt wurde, in der **24sten** Reihe, von links in der dritten Stelle anfangend, angesteckt; dahinter Theilungsstrich. Dieser wird, nach geendeter Thaler-Division, in der **21sten** Reihe, durch **24** (**24** ●) getheilt; hinter diesem Quotienten ein Theilungsstrich; über diesen Quotienten der neue Divisor **12** hinter den Theilungsstrich gesetzt; dann hinter diesen Quotienten wieder Theilungsstrich; darauf der Rest der Thaler-Division; Strich; letzte Division; dieser Quotient wird sogleich dem Thaler-Quotienten in der 21sten Reihe angehängt; hinter diesem ein Trennungszeichen; dann der Rest der letzten Division, als Zähler, dann Bruchstrich, dann Nenner und Pfennigzeichen. — Rechts auf der Tafel stehen die Zahlen von den ersten Multiplicationen; wer Störung durch sie fürchtet, kann sie nach dem Transporte hinwegnehmen. — Nach beendeter Rechnung ist die Tafel wie Tab. A. Hier finden sich fast alle gebrauchten Zahlen wieder, einige bei den Divisionen vernichtete abgerechnet; ein Fehler kann durch Nachlesen also leicht gefunden werden.

Auf der kleinen Tafel läßt sich diese Rechnung aber mit einigen abkürzenden Kunstgriffen ebenfalls bequem und deutlich ausführen; wir haben hier nur 21 horizontale und 14 vertikale Reihen.

Der unverändert bleibende Aufsatz fordert 25 Stellen; wir setzen das Multiplicandum in die erste, den Multiplicator von links in die zweite Reihe; dahinter, als deutliches Scheidungszeichen, ein Quadrat, in der 7ten Stelle der 2ten Reihe. Rechts, in der Mitte horizontal und ganz am Rande vertikal, führt man die Multiplicationen aus; die ersteren sind leicht im Kopfe auszuführen; die gefundenen Producte überträgt man in die entsprechenden Reihen, und zieht die hier, rechts, gebrauchten Zahlen alle wieder fort. Der Pfennigbruch kommt in die 2te Reihe, in der 8ten Stelle beginnend; 3te Reihe Groschenbruch; 4te: Thalerbruch; 5te: Thalerzahl als Multiplicator; 6te: freie Linienreihe; 7te, 8te und 9te zur Multiplication; 10te: freie Linienr., 11te: Product, 12te: additiver Zähler, 13te: freie Linienreihe, 14te: Product; dieses wird nun in die 6te Reihe, die freie Linienreihe, richtig übertragen, dann die 39 nun überflüssigen Zahlen der 7ten, 8ten, 9ten, 11ten, 12ten und 14ten Reihe alle weggezogen. Jetzt haben wir 6 Reihen besetzt; hinter dieses Multiplications- und Additions-Product in der 6ten Reihe kommt ein Trennungsstrich, hinter diesen 58752. Links am Rande, in der 6ten oder 7ten Reihe, wird der Generalmultiplicator zu einem gleichnamigen Bruche gemacht, der Zähler 423 in die 7te Reihe unter 56238731; der Nenner 5 unter 58752, als Multiplicatoren, gesetzt. Die 8te Reihe ist freie Linienreihe;

9te, 10te, 11te zur Multiplication; 12te: freie Linienteihe; 13te: Product; dieses wird nun sogleich in die 8te, freie Linienreihe, übertragen; dahinter Trennungsstrich und die 38 nun überflüssigen Zahlen der 9ten, 10ten, 11ten und 13ten Reihe alle weggenommen. 58752 in der 6ten Reihe × mit 5, fordert 6 Stellen; wir haben deren nur 5 bis zum Rande der Tafel, führen deshalb das Product 293760 in der 9ten Reihe aus, übertragen es sogleich in die 12te Reihe, mit der 3ten Stelle von links anfangend; dahinter Trennungsstrich; heben es aber in der 9ten Reihe sogleich wieder fort. Mit diesem Divisor in der 12ten Reihe theilen wir den großen Factor in der 8ten Reihe; diese Division wird in der 9ten und 10ten Reihe ausgeführt; etwaige Multiplicationen werden rechts unten ausgeführt, und nach dem Gebrauche wieder fortgenommen. In der 8ten Reihe wird der Thaler-Quotient 80981 angesteckt, das Thalerzeichen t darüber in die 7te Reihe gesetzt; der Divisionsrest steht nun in der 9ten Reihe. In der 12ten Reihe wird die Division mit 24, dann mit 12 vorgenommen; der frühere Divisionsrest 4653 kommt in die Mitte der 13ten Reihe, wird dividirt durch 1020; der Pfennig-Quotient 4 wird in die 9te Reihe an den Rand rechts, darunter in die 10te Reihe der Nenner 573 und der Bruchstrich; der Zähler 1020 und das Pfennigzeichen in die 11te Reihe gesetzt. Das Resultat findet sich unter einander in der 8ten bis 12ten Reihe, zur Rechten. Nach beendeter Rechnung stehen auf der Tafel nur 121 Zahlen, 31 Zeichen und 5 Buchstaben. (S. Tab. B.) Auf der großen Tafel befinden sich nach der oben ausgeführten Rechnung 254 Zahlen, 57 Zeichen und 5 Buchstaben. (S. Tab. A.)

Ein geübter sehender Rechner gebraucht zu diesem Calcul auf der Schiefertafel oder auf Papier eine gute 1/4 Stunde; ein geübter blinder Rechner auf unserer Tafel gebraucht kaum 1/2 Stunde zur Ausführung; ein sehr geübter blinder Kopfrechner hat fast eine halbe Stunde dazu nöthig.

```
9 5 7 t 5 g 4. 1 1. 1 7 : 1 2 f : 8 4. 3. 5.            2 0 4.        1 7
            4. 1 1. 2 0 4 : 1 2.                          4.        1 2
          5. 8 2 7. 2 4 4 8 : 2 4.                  • • • •       • • •
  9 5 7. 1 3 0 6 7. 5 8 7 5 2.                        8 1 6.        3 4
                    9 5 7.                              1 1.      1 7
           • • • • • • • • • • •                    • • • • •   • • • •
                 4 1 1 2 6 4.                         8 2 7.      2 0 4
               2 9 3 7 6 0                                          1 2
             5 2 8 7 6 8                            2 4 4 8.    • • • •
           • • • • • • • • • •                            5.      4 0 8
             5 6 2 2 5 6 6 4.                 • • • • • • •     2 0 4
                   1 3 0 6 7.                   1 2 2 4 0.   • • • • •
         • • • • • • • • • • •                      8 2 7.      2 4 4 8
             5 6 2 3 8 7 3 1 : 5 8 7 5 2.     • • • • • • •       2 4
                     4 2 3.          5.         1 3 0 6 7. • • • • • • •
         • • • • • • • • • • • • • • • • •                     9 7 9 2
           1 6 8 7 1 6 1 9 3 : 2 9 3 7 6 0.                  4 8 9 6
         1 1 2 4 7 7 4 6 2                                 • • • • • •
       2 2 4 9 5 4 9 2 4                                     5 8 7 5 2
     • • • • • • • • • • • • •
       2 3 7 8 8 9 8 3 2 1 3 : 8 0 9 8 1 t 4. 5 7 3. 1 0 2 0 f
           1 2.        4 6 5 3.
2 4 • 2 9 3 7 6 0 : 1 2 2 4 0 : 1 0 2 0 : 4 6 5 3 : 4.
                                    5 7 3.                  (Tab. A.)
```

```
                                             (Tab. B.)
9 5 7 t 5 g 4 •. 1 1 .• 1 7 : 1 2 f :
8 4 •. 3 .• 5 : 4 •. 1 1 .• 2 0 4 : 1 2 •.
          5 •. 8 2 7 .• 2 4 4 8 : 2 4 •.
9 5 7 •. 1 3 0 6 7 .• 5 8 7 5 2 •.
                        9 5 7 •.
              5 6 2 3 8 7 3 1 : 5 8 7 5 2
                        4 2 3 : t       5
        2 3 7 8 8 9 8 3 2 1 3 : 8 0 9 8 1
                      4 6 5 3 :         4
                                5 7 3 .•
              1 2 :             1 0 2 0 f
2 4 : 2 9 3 7 6 0 : 1 2 2 4 0 : 1 0 2 0 •.
              4 6 5 3 •. 4 •.
                5 7 3 •.
```

5. Subtraction benannter Zahlen.

Aufsatz wie bei der Subtraction mit unbenannten Zahlen und bei der Addition mit benannten Zahlen. — Die Multiplicationen werden rechts unten, die Divisionen links unten ausgeführt; der Generalnenner kann rechts oben angesteckt werden. Z. B.

```
319 t   4 g  10 •.  6 .•   7 f        5×7=35
120 •. 18 •.    •   4 .•   5 •.       7:35=5×6=30
----------------------------------    5:35=7×4=28
198 t  10 g  10 •.  2 .•  35 f                    --
                                                  2•.

Z. B. 114 ir   5 mt   3 tg
       97 •.  11 •.  25 •.            30 + 3 = 33 — 25 = 8
---------------------------           12 + 4 = 16 — 11 = 5
       16 •.   5 •.   8 •.
```

6. Division benannter Zahlen.

Aufsatz wie oben, in der Mitte der Tafel.

Z. B. a) 63 sollen sich theilen in 144 ℛ 18 ℳ 4 ∂.
63 läßt sich durch die Factoren 9 und 7 ($9 \times 7 = 63$) zerlegen; also: $9 = 16$ ℛ 2 ℳ $4/9$ ∂; dieses Product: durch $7 =$ 2 ℛ 7 ℳ $1\,7/9$ ∂;

oder durch directe Division:

$2 \times 63 = 126 - 144 = 18$ Rest;

$18 \times 24 + 18 = 450 : 63 = 7 \times 63 = 441$, Rest 9;

$9 \times 12 = 108 + 4 = 112 : 63 = 1$, Rest $\frac{49}{63} = \frac{7}{9}$.

b) 27 : 32 Wispel 18 Scheffel 6 Metzen.

$27 : 32 = 1$, Rest 5;

$5 \times 24 + 18 = 138 : 27 = 5$, Rest 3;

$3 \times 16 + 6 = 54 : 27 = 2$, — 0; also:

1 Wispel 5 Scheffel 2 Metzen.

Die Quotienten werden nicht unzweckmäßig unter die entsprechenden Columnen gesetzt.

c) 5000000 : 130000 Centner = 500 : 13.

$114 \times 13 = 1482 : 500 = 2$ Pf. Rest 482;

$482 \times 32 = 15424 : 500 = 30$ Loth. Rest 424;

$424 \times 4 = 1696 : 500 = 3$ Quent. Rest $\frac{196}{500} = \frac{49}{125}$

also: 2 Pf. 30 Loth $3\,^{49}/_{125}$ Quent.

d) 81192 Loth, wieviel Centner und Pfunde rc.?

```
32 : 81192 | 2537 : 114 = 22 Ctnr.
     64      228
     ---     ---
     171     257
     160     228
     ---     ---
     119      29 Pfund.
      96
     ---
     232
     224
     ---
       8 Lth.
```

Die vier arithmetischen Grundoperationen, welche die Bestimmung von Summen (+), Producten (×), Differenzen (—) oder Quotienten (:) gegebener Zahlen fordern, kommen oft in einer Aufgabe vor; die Ausführung der vier Grundoperationen muß dann in bestimmter Aufeinanderfolge geschehen. Z. B. A. B. und C. haben eine gemeinschaftliche Speculation unternommen; der Gewinn soll gleichmäßig getheilt werden. A. gewinnt 2570 ℳ; B. gewinnt 2350 ℳ weniger als 5 mal soviel; C. gewinnt nur halb soviel als B.; wieviel erhält ein Jeder?

A. = 2570 ℳ.
B. = 2570 × 5 — 2350 = 10500 ℳ.
C. = 10500 : 2 = 5250 ℳ.

$$\begin{array}{r} 2570 \\ 10500 \\ 5250 \\ \hline 3 : 18320 \mid 6106 \\ \tfrac{2}{3} = 16 \end{array}$$

Die Ausführung dieses Beispieles im Kopfe hat keine Schwierigkeiten, so wenig, als auf unserer Tafel, und bedarf es für denjenigen, welcher der bisherigen Entwickelung der Bearbeitung unserer Tafel genau gefolgt ist, keiner weiteren Erörterung. Stellen wir die Aufgabe aber: A. gewinnt 25753 $^{2}/_{13}$ ℳ; B. 19307 $^{5}/_{7}$ ℳ weniger als 5 $^{2}/_{7}$ mal soviel, und C. nur halb soviel als B., dann gestaltet sich die Lösung für den Kopfrechner schwierig; auf unserer Tafel sind die Schwierigkeiten leicht überwunden.

V. Proportionalrechnungen.

Arithmetische und geometrische Verhältnisse und Proportionen.

Das **Verhältniß** einer Zahl zu einer anderen ist die Bestimmung, um wie viel eine Zahl größer oder kleiner, als die andere ist; also: die gegenseitige Beziehung zweier Zahlen zu einander. Diese zwei verglichenen Zahlen sind die **Glieder** des Verhältnisses; das erstere heißt das **Vorderglied**, das zweite das **Hinterglied** (a und b). — Geschieht die Vergleichung durch **Subtraction**, dann entsteht ein **arithmetisches Verhältniß**; dieses bestimmt, um wie viel die erste Zahl größer oder kleiner ist, als die zweite; die Zahl dieses Unterschiedes ist die **Differenz** oder der **Name** des arithmetischen Verhältnisses; es ist also = der Differenz zweier Zahlen ($a - b = d$; $11 - 18 = 7$). Gleiche Differenzen geben gleiche Verhältnisse, ungleiche Differenzen ungleiche Verhältnisse. —

Geschieht die Vergleichung durch Division, dann entsteht das geometrische Verhältniß; dieses bestimmt, um wie viel Mal die erste Zahl größer oder kleiner ist, als die zweite; die Zahl des Unterschiedes heißt der Exponent oder Quotient des geometrischen Verhältnisses; es ist also = dem Quotienten zweier Zahlen ($a:b=e$; $4:48=12$). Gleiche Exponenten geben gleiche Verhältnisse, ungleiche Exponenten ungleiche Verhältnisse.

Eine Proportion ist die Gleichheit zweier Verhältnisse; sie besteht demnach aus vier Gliedern (a, b, c, d; 2, 4, 36, 72); das erste und das vierte Glied (a und d) heißen die äußeren, das zweite und dritte (b und c) die inneren oder mittleren Proportional-Glieder; das erste und dritte (a und c) heißen die Vorderglieder, das zweite und vierte (b und d) die Hinterglieder; Vorder- und Hinterglieder sind homolog oder gleichliegend.

Eine stetige Proportion hat gleiche mittlere Glieder ($4:16=16:64$); eine unstetige oder abgesonderte Proportion hat ungleiche Mittelglieder ($3:9=17:51$).

Eine arithmetische Proportion ist die Gleichheit zweier arithmetischer Verhältnisse ($a-b=c-d=D$; $18-11=23-16=7$). Eine geometrische Proportion ist die Gleichheit zweier geometrischer Verhältnisse ($a:b=c:d$; $24:8=33:11$; Exponent $=3$.)

Arithmetische Proportionen.

1) Die Summe der zwei äußeren Glieder ist gleich der Summe der zwei mittleren Glieder; $a-b=c-d$, und $a+b=c+d$; z. B. $29-11=37-19$; $11+37=29+19$.

2) Jedes äußere Glied ist gleich der Summe der inneren Glieder minus dem anderen äußeren Gliede; $a=b+c-d$; $d=b+c-a$; z. B. $29=11+37-19$; $19=37+11-29$.

3) Jedes innere Glied ist gleich der Summe der äußeren minus dem anderen inneren Gliede; $b=a+d-c$; $c=a+d-b$; z. B. $11=29+19-37$; $37=29+19-11$.

4) Ein äußeres Glied wird also gefunden, wenn man die zwei mittleren addirt, und das bekannte äußere abzieht; $a.b=c.x$; $x=b+c-a$; z. B. $34.79=62.x$, also $x=79+62$

-34 ($=107$); oder $x \,.\, 78 = 23 \,.\, 19$, also $x = 78 + 23 - 19$ ($=82$).

5) Ein mittleres Glied wird gefunden, wenn man die zwei äußeren addirt, und das bekannte mittlere abzieht; $a \,.\, b = x \,.\, d$; also $x = a + d - b$; z. B. $48 \,.\, 75 = x \,.\, 59$, also $x = 48 + 59 - 75 = 32$; oder $15 \,.\, x = 27 \,.\, 39$, also $x = 15 + 39 - 27 = 27$.

6) Das mittlere Glied einer stetigen arithmetischen Proportion ist gleich der halben Summe der äußeren Glieder; $b = \frac{a+c}{2}$; z. B. ist die mittlere arithmetische Proportionale von 15 und 27 $\frac{15+27}{2} = 21$, also $15 - 21 = 21 - 27$.

7) Die Glieder einer arithmetischen Proportion können auf drei verschiedene Arten verwechselt werden, und es entsteht allemal wieder eine Proportion:

	$a - b = c - d$	$29 - 11 = 37 - 19$
1)	$a - c = b - d$	$29 - 37 = 11 - 19$
2)	$b - a = d - c$	$11 - 29 = 19 - 37$
3)	$d - b = c - a$	$19 - 11 = 37 - 29$.

8) Zu den homologen Gliedern darf man Gleiches addiren, oder sie mit Gleichem multipliciren und dividiren, ebenso Gleiches subtrahiren.

$(a \mp n) - (b \mp n) = c - d$; z. B. $(29 \mp 5) - (11 \mp 5) = 37 - 19$.
$(a \mp n) - b = (c \pm n) - d$; z. B. $(29 \mp 5) - 11 = (37 \mp 5) - 19$.

Geometrische Proportionen.

1) Die Verhältniß-Exponenten müssen gleich sein. Z. B. $8 : 16 = 16 : 32$; $21 : 39 = 35 : 65$.

2) Das Product der äußeren Glieder ist gleich dem Producte der mittleren: z. B. $21 \times 65 = 39 \times 35 = 1365$.

3) Zwei gleiche Producte, von denen jedes aus zwei Factoren besteht, geben eine geometrische Proportion, in welcher die Factoren des einen Productes die äußeren, die Factoren des anderen Productes die mittleren Glieder sind:

Z. B. $mn = pq$; $m : p = q : n$; denn $\frac{mn}{np} = \frac{pq}{np}$, oder $\frac{m}{p} = \frac{q}{n}$; z. B. 512; $\overset{m}{8} \times \overset{n}{64}$ und $\overset{p}{16} \times \overset{q}{32}$; $8 : 16 = 32 : 64$;

$$\frac{8 \times 64}{64 \times 16} = \frac{512}{1024} = \frac{16 \times 32}{64 \times 16} = \frac{512}{1024} \text{ oder } \frac{8}{16} = \frac{32}{64}.$$

4) Der Proportions-Exponent ist gleich dem Producte der Exponenten der Proportionen; $a : b = c : d$; $a \times c : b \times d$; $\frac{a}{b} = e$; $\frac{c}{d} = n$; $\frac{a \times c}{b \times d} = e \times n$; z. B. $4 : 16 = 32 : 128$; $128 : 2048$; $\frac{16}{4} = 4$; $\frac{32}{128} = 4$; $\frac{128}{2048} = 4 \times 4 = 16$.

5) Die Summe oder die Differenz der zwei ersten Glieder $(a \mp b)$ verhält sich zu dem zweiten, wie die Summe oder Differenz der zwei letzten Glieder $(c \mp d)$ zu dem vierten; $a \mp b : b = c \mp d : d$; z. B. $54 : 72 = 3 : 4$; $54 + 72 : 72 = 3 + 4 : 4$; d. i. $126 : 72 = 7 : 4$; und $54 - 72 : 72 = 3 - 4 : 4$; d. i. $18 : 72 = 1 : 4$.

6) Die Summe der zwei ersten Glieder verhält sich zu der Summe der zwei letzten, wie die Differenz der zwei ersten Glieder zu der Differenz der zwei letzten; $a + b : c + d = a - b : c - d$; z. B. $54 + 72 : 3 + 4 = 54 - 72 : 3 - 4$; d. i. $126 : 7 = 18 : 1$.

7) Sind drei Glieder gegeben $(a : b = c : x)$, dann findet man das vierte unbekannte x, wenn man zwei Glieder mit einander multiplicirt und das Product durch das bekannte dritte Glied dividirt, und zwar:

a) ist ein **äußeres** Glied unbekannt $(x : b = c : d)$, dann multiplicirt man die beiden mittleren, und dividirt das Product durch das bekannte äußere; $x = \frac{b \times c}{d}$; z. B.

$x : 85 = 56 : 40$; $x = \frac{85 \times 56}{40} = 119$; $119 : 85 = 56 : x$; $x = \frac{b \times c}{a}$, $x = \frac{85 \times 56}{119} = 40$;

b) ist ein **mittleres** Glied unbekannt $(a : b = x : d)$, dann multiplicirt man die beiden äußeren Glieder, und dividirt das Product durch das bekannte mittlere; $x = \frac{a \times d}{b}$; z. B.

$72 : x = 4 : 3$, $x = \frac{72 \times 3}{4} = 54$; $72 : 54 = x : 3$, $x = \frac{a \times d}{c}$; $x = \frac{72 \times 3}{54} = 4$.

8) Sind die ersten beiden Glieder ($a : b$) gegeben, dann findet man die dritte geometrische Proportionale ($b : x$), wenn man das zweite Glied b zur zweiten Potenz erhebt, und dieses Product durch das erste Glied a dividirt; $x = \frac{b^2}{a}$ z. B. $8 : 16 = 16 : x$; $16^2 = \frac{256}{8} = 32$, also $8 : 16 = 16 : 32$. — Soll bei $a : b = x : y$ gefunden werden, dann sucht man zuerst $x = \frac{b^2}{a} = c$, also $a : b = c : y$, dann $y = \frac{b \times c}{a} = d$; z. B. $8 : 16 = x : y$; $x = \frac{16^2}{8} = 32$; $8 : 16 = 32 : y$; $y = \frac{32 \times 16}{8} = 64$, also $8 : 16 = 32 : 64$.

9) Sind das erste und das letzte Glied ($a : x = x : d$) gegeben, dann findet man die dritte geometrische Proportionale, wenn man das erste und letzte Glied multiplicirt, und aus dem Producte die Wurzel zieht; $x = \sqrt[2]{(a \times d)}$; z. B. $8 : x = x : 32$; $\sqrt[2]{(8 \times 32)} = \sqrt[2]{256} = 16$.

10) Multiplicirt oder dividirt man ein äußeres und ein inneres Glied mit oder durch einander mit gleicher Größe, dann bleibt die Proportion unverändert; nicht aber, wenn zwei äußere oder zwei innere multiplicirt oder dividirt werden. Z. B. $7 : 42 = 24 : 144$. $7 \times 5 : 42 = 24 \times 5 : 144$, d. i. $35 : 42 = 120 : 144$. $7 : \frac{42}{2} = 24 : \frac{144}{2}$, d. i. $7 : 21 = 24 : 72$.

11) Multiplicirt oder dividirt man die Glieder einer geometrischen Proportion der Reihe nach durch die Glieder einer anderen, dann bilden die Producte oder Quotienten wiederum eine geometrische Proportion, welche eine *zusammengesetzte* genannt wird. Z. B. **Multiplication**: $a : b = c : d \times f : g$ $h = : k$; $a \times f : b \times g = c \times h : d \times k$; z. B. $12 : 24 = 48 : 96 \times 6 : 12 = 24 : 48$; $6 \times 12 : 12 \times 24 = 24 \times 48 : 48 \times 96$; d. i. $72 : 288 = 1152 : 4608$.

Division: $\frac{a}{f} : \frac{b}{g} = \frac{c}{h} : \frac{d}{k}$; $\frac{12}{3} : \frac{72}{9} = \frac{96}{16} : \frac{576}{48}$; d. i. $4 : 8 = 6 : 12$.

12) Sind die Hinterglieder einer Proportion der Reihe nach die Vorderglieder der andern, dann verhält sich das 1ste Glied der Isten Proportion zum 2ten der IIten, = das 3te der Isten zum 4ten der IIten. Z. B.

$$\begin{array}{lr} a : b = c : d & 4 : 16 = 32 : 128 \\ b : f = d : g & 16 : 64 = 128 : 512 \\ a : f = c : g & 4 : 64 = 32 : 512. \end{array}$$

13) Sind die Vorderglieder zweier geometrischer Proportionen der Reihe nach gleich, dann sind es auch die Hinterglieder; und umgekehrt. Z. B.

$a : b = c : d$	$15 : 90 = 36 : 216$	$a : b = c : d$	$7 : 42 = 24 : 144$
$a : f = c : g$	$15 : 30 = 36 : 72$	$f : b = g : d$	$21 : 42 = 72 : 144$
$b : f = d : g$	$90 : 30 = 216 : 72$	$a : f = c : g$	$7 : 21 = 24 : 72.$

14) Ist das 2te Glied der Isten gleich dem 1sten der IIten, und das 3te der Isten gleich dem 4ten der IIten, dann verhält sich das 1ste der Isten Proportion zum 2ten der IIten, wie das 3te der IIten zum 4ten der Isten. Z. B.

$$\begin{array}{lr} a : b = c : d & 3 : 18 = 48 : 288 \\ b : f = g : c & 18 : 36 = 24 : 48 \\ a : f = g : d & 3 : 36 = 24 : 288. \end{array}$$

15) Sind in zwei Proportionen gleiche mittlere Glieder, dann sind die äußeren Glieder umgekehrt proportional. Z. B.

$$\begin{array}{lr} a : b = c : d & 9 : 45 = 55 : 275 \\ f : b = c : g & 3 : 45 = 55 : 825 \\ a : f = g : d & 9 : 3 = 825 : 275. \end{array}$$

16) Sind in zwei Proportionen gleiche äußere Glieder, dann sind die mittleren umgekehrt proportional. Z. B.

$$\begin{array}{lr} a : b = c : d & 9 : 45 = 55 : 275 \\ a : f = g : d & 9 : 3 = 825 : 275 \\ b : f = g : c & 45 : 3 = 825 : 55. \end{array}$$

Der Aufsatz der Verhältnisse und Proportionen auf unserer Tafel ist einfach. Das Zeichen des Verhältnisses ist ● 5 (● Spitzn. in 5); das der Gleichheit ist 8 ● 4 (Spitznadeln in 4 und 8). Bei Brüchen werden die ganzen von den gebroche-

nen Zahlen durch das Trennungszeichen • (glatt) geschieden; 5
z. B. $4\frac{1}{2} : 3\frac{3}{4} = 6\frac{7}{8} : x$.

4 1 2 3 3 4 6 7 8 x

(Das x braucht nicht aufgesetzt zu werden.)

Die Proportionalrechnungen mit benannten Zahlen werden unter dem Namen der Reguladetri auf das praktische Leben angewendet; drei Zahlen sind gegeben, die vierte unbekannte wird nach geometrischen Proportionen gesucht und gefunden. Die einfache Reguladetri löset die Aufgaben, bei welchen mittelst einer einfachen geometrischen Proportion die gesuchte Zahl gefunden wird. Die Theilungs-, Gesellschafts- und Alligationsrechnungen lösen die Aufgaben, in welchen eine gegebene benannte Zahl nach einer geometrischen Proportion getheilt wird.

Die Reguladetri, der Dreisatz.

A. Der gerade Dreisatz, die directe Reguladetri mit gleichen und ungleichen Sätzen.

Die einzelnen Glieder können einfach und gebrochen sein; dann auch noch Unterordnungen enthalten, welche als Brüche der höheren Ordnung ausgedrückt werden. Z. B.:

a) Ein Gärtner hat 7 Morgen Land mit Kartoffeln bestellt; er erntet auf jedem Morgen $5\frac{1}{2}$ Wispel (à 40 Himpten); verkauft den Himpten zu 3 Sgr. 6 ₰; wie viel löset er aus der Ernte?

Aufsatz in der Mitte der Tafel in der ersten Horizontalreihe: 1 Mrgn. : 7 Mrgn. = $5\frac{1}{2}$ Wsp. : x

$2 \times 5\frac{1}{2} = 11 \times 7 = 77 : 2 = 38\frac{1}{2} \times 40 = 1540$ Hpt.

1 Hpt. : 1540 Hpt. = $\frac{7}{48}$ Thlr. : x

$7 \times 1540 = 10780 : 48 = 224$ Thlr. 14 Sgr.

2 : 28 | 14 Sgr.

b) 24 Loth kosten 4 Thlr. 2 Sgr. 3 ₰; wieviel kosten 4 Pfund 16 Loth?

4 ℔ 16 Loth = $4\frac{1}{2}$ ℔

24 » = $\frac{3}{4}$ ℔

2 Sgr. 3 ₰ = $2\frac{1}{4}$ Sgr. = $\frac{2\frac{1}{4}}{24} = \frac{9}{96} = \frac{3}{32}$ Thlr., also

4 Thlr. 2 Sgr. 3 ₰ = $4\frac{3}{32}$ Thlr.

Auffaß: $\frac{3}{4}$ ℔ : $4\frac{1}{2}$ ℔ = $4\frac{3}{32}$ ℛ : x

$\cancel{3}$ 1	$\cancel{9}$ 3	131
$\cancel{2}$ 1		
$\cancel{32}$	$\cancel{4}$ $\cancel{2}$ 1	
16	393	24 ℛ

$$\begin{array}{r} 393 \\ 32 \\ \hline 73 \\ 64 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{9 \times 24 \text{ ℊ}}{16} = \frac{9 \times 3}{2} = \frac{27}{2} = 13\tfrac{1}{2} \text{ ℊ}$$

also 24 ℛ 13 ℊ 6 ₰

Die Reductionen zu gleichbenannten Brüchen ($4\frac{1}{2} = 9$, und $4\frac{3}{32} = 131$) sind leicht im Kopfe ausgeführt, und werden die reducirten Zahlen und die Nenner der Brüche nach der Gliederordnung in der Reihe unter dem Aufsatze angesteckt Die gehobenen (hier durchstrichenen) Zahlen werden sogleich auf der Stelle durch die neuen ersetzt.

3 ⁘ 4 p ⁘ 4 ⁘ 1 ⁘ 2 p ⁘ 4 ⁘ 3 ⁘ 32 t ⁘ x

$\cancel{3}$ ⁘	$\cancel{9}$ ⁘ 3	131 ⁘	131 ⁘
$\cancel{2}$ ⁘	$\cancel{4}$ ⁘ $\cancel{2}$		3
$\cancel{32}$ ⁘			16 ⁘ 393 ⁘ 24 ⁘
16 ⁘			9

Dieses Exempel ist leicht zu lösen und eignet sich deswegen zur ersten Tafelübung. Im Kopfe ist es ebenfalls leicht zu entwickeln; $\frac{3}{4} : \frac{18}{4} = 3 : 18 = 1 : 6$; also 4 ℛ 2 ℊ 3 ₰ $\times$ 6 = 24 ℛ 13 ℊ 6 ₰.

c) 5 Pfund 8 Loth 3 Quentchen kosten 1 ℛ; wieviel bekommt man für 18 ℊ?

18 ℊ = $\frac{3}{4}$ ℛ. Aufsatz:

1 ℛ : $\frac{3}{4}$ ℛ = 5 ℔ 8 Loth 3 Quent. : x.

d. i. $\frac{4}{4} : \frac{3}{4} = 4 : 3$ ꝛc., mithin 5 ℔ 8 Lth. 3 Qt. $\times$ $\frac{3}{4}$ = x.

also: 3×3 Qt. = 9 Qt. = 2 Lth. 1 Qt.

3×8 Lth. = 24 » —

3×5 ℔ = 15 ℔ — —

4 : 15 ℔ 26 Lth. 1 Qt. | 3 ℔

Trsp.) 4 : 15 ℔ 26 Lth. 1 Qt. | 3 ℔
— 12
Rest 3 × 32 = 96 + 26 = 122 Lth. : 4 = 30 Lth.
Rest 2
2 × 4 = 8 + 1 = 9 : 4 = 2¼ Qt.

An diesem Beispiele kann geübt werden, wie wenige Zahlen und Zeichen auf der Tafel aufzusetzen sind; denn bei diesen kleinen Zahlen bedarf es nur des Aufsatzes, der Multiplication und der Division:

1 t 3 4 t 5 p 8 l 3 q x
4 3
15 p 26 l 1 q 3 p 30 l 2 1 4 q
3 122
2 9

Der Multiplicator 3 und der Divisor 4 kommen in die zweite Reihe; in der dritten führt man die Multiplication aus, und setzt in derselben hinter einem Theilungsstriche den Quotienten, die Auflösung und Division der Reste in der 4ten und 5ten Reihe ausführend.

Bei einstelligen Zahlen bedarf man keines Endzeichens. Große Multiplicationen können rechts, größere Divisionen links unten, am Rande der Tafel, ausgeführt werden.

B. Der umgekehrte Dreisatz oder die indirecte Regeldetri, invertirte Regeldetri; die Regula de quinque, oder die Reesische Regel; die Kettenregel nebst den dabei nöthigen Abkürzungen; die Zins-, und Zins-auf-Zinsrechnung, Rabatt-, Discont-, Termin-, Thara-, Fusti-, Gewinn- und Verlust-, Wechsel-, Gesellschafts-, Theilungs-, Gold- und Silber-, Alligations-, Münz-, und Factorei-Rechnung wollen wir, als Modificationen der Reguladetri, zusammenfassen. In diesen Rechnungen muß die eine die andere Modification nach Umständen unterstützen. Uebung im richtigen Aufsatze ist ein Haupterforderniß.

Invertirte Reguladetri.

Ein Buchdrucker hat ein Buch gedruckt von 18 Bogen; es standen 24 Zeilen auf einer Seite und 42 Buchstaben in jeder Zeile. Bei der zweiten Auflage setzt er 28 Zeilen, jede zu

48 Buchstaben auf einer Seite. Wie viel Bogen wird das Buch nun stark?

Aufsatz: $\overset{2}{\cancel{28}}$ Zeilen : $\overset{1}{\cancel{24}}$ Zeilen = $\overset{9}{\cancel{18}}$ Bgn. : x

$\overset{1\ \cancel{2}}{\cancel{48}}$ Buchst. : $\overset{3}{\cancel{42}}$ Buchst. = x : y.

$24 : 48 = 1 : 2$ $\qquad 3 \times 9 = 27$
$28 : 42 = 2 : 3$
$2 : 18 = 1 : 9$ $\qquad 2 : 27 \mid 13\frac{1}{2}$ Bgn.

Regula de quinque.

Ein Stück $^{10}/_4$ breites Tuch von $22\frac{1}{2}$ Ellen lieferte ein Arbeiter in 12 Tagen; dagegen liefern 6 Arbeiter in 24 Tagen 12 Stück $^{9}/_4$ breites Tuch. Wie viel Ellen hält ein Stück des letzteren Tuches?

Aufsatz: $\overset{\cancel{2}}{1}$ Arb. : $\overset{1}{\cancel{6}}$ Arb. = $\overset{\cancel{45}\ 5}{\cancel{22}\,^1/_2}$ Ellen : x

$\overset{1}{\cancel{12}}$ Tage : $\overset{\cancel{2}}{\cancel{24}}$ Tage = x : y

$\overset{1}{\cancel{9}}$ Viert. : $\overset{5}{\cancel{10}}$ Viert. = x : y

$\overset{1\ \cancel{2}}{\cancel{12}}$ Stück : 1 Stück = x : y

$12 : 24 = 1 : 2$
$6 : 12 = 1 : 2$ $\qquad 5 \times 5 = 25$ div. $1 = 25$ Ellen.
$9 : 45 = 1 : 5$
$2 : 10 = 1 : 5$
$2 : 2 = 1 : 1$

Kettenrechnung.

Amtmann N. hat 24 Morgen mit Hafer bestellt; er erntet auf jedem Morgen 11 Stiegen, und die Stiege giebt, im Durchschnitte gerechnet, $2\frac{1}{2}$ Himpten. Wenn er nun den Wispel (= 40 Himpten) zu $17\frac{1}{2}$ ℛ︁ Gold verkauft, den Louisd'or zu $5\frac{1}{2}$ ℛ︁ Münze gerechnet; wieviel Geld löset Amtmann N. aus dem Hafer?

Frage? Geld, Thaler? — **Aufsatz:**

1 Morgen	3 ~~24~~ Morgen
1 Stiege	11 Stiege

1 ~~8~~	1
~~40~~ Himpt. 2	~~5~~ ~~2~~½ Himpt.
1 ~~5~~ Thaler Gold. 2	7 ~~35~~ ~~17~~½ Thlr. Gold.
2	11 ~~5~~½ Thlr. Münze.

$5 : 40 = 1 : 8$
$8 : 24 = 1 : 3$
$5 : 35 = 1 : 7$ Divisor $= 2 \times 2 \times 2 = 8$
Dividend $= 3 \times 11 \times 7 \times 11 = 2541 \mid 317$ Thlr.
$^5/_8 = 15$ Gr.

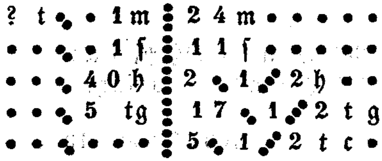
Die Kettensatzrechnung fordert die Theilung unserer Tafel in der Mitte herab. Zu dem Ende steckt man in der Mitte der Tafel von oben herab in 2 und 6 eines jeden Zahlquadrates große glatte Nadeln, und setzt links von dieser Theilung die Posten, welche den Divisor bilden, rechts die zum Dividendum gehörenden. — Der minder Geübte, welcher die einzelnen Posten nicht sogleich genau ordnen kann, setzt die Aufgabe links am Rande unter einander; in unserem Beispiele:

24 mgn	d. h. 24 Morgen; 1 M. zu 11 Stiegen;
1 m : 11 stg	1 St. zu 2½ Himpten; 1 Wispel;
1 stg : 2½ hp	zu 17½ Thaler Gold; 1 Louisd'or
1 wp : 17½ tg	zu 5½ Thaler Courant; Frage:
1 lr : 5½ tc	Thaler Courant der Hafer?
!	
? tc : hfr	

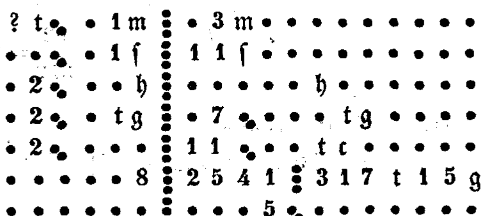
Der Geübtere setzt links oben in die erste Reihe:

Frage Thaler ct	1 mgn	24 mgn
!	1 st	11 stg
● tc	40 hp	2½ hp
	5 tg	17½ tg
		5½ tc

Anstatt mgn bedarf es nur eines m; anstatt stg nur eines s, und anstatt hp nur eines h; tg und tc (Thlr. Gold und Courant) müssen unterschieden bleiben. Dieser Aufsatz wäre also:



In der dritten Reihe von links werden, wenn Brüche vorkommen, sogleich Trennungszeichen vor jedem Posten gesteckt, um die Nenner der Brüche von der andern Seite herübernehmen zu können; kommen Brüche in der linken Columne vor, dann wird in der, dem letzten bezeichnenden Buchstaben folgenden, Vertikalreihe ebenfalls eine Reihe Trennungszeichen angebracht. — Nun werden die Brüche gleichnamig gemacht, die Nenner herübergenommen; also **2½** in **5**, der Nenner **2** links in dieser Reihe vor das Trennungszeichen; **17½** in **35**, die **2** ebenso; **5½** in **11**, die **2** ebenso. Nun wird gehoben, was zu heben ist; die Zahl, welche in **1** verwandelt wird, wird sogleich völlig weggezogen; die andere, in die verkleinerte Zahl verwandelt, aber so, daß die Einer unmittelbar vor einem Zeichen oder dem bezeichnenden Buchstaben zu stehen kommen; z. B. **5 : 40** = **1 : 8**, *mithin* **5** *fort, aus* **40** *eine* **8** *gemacht,* indem dem Nullknopfe eine kleine Nadel in **8** zugefügt, die **4** weggenommen wird; **8 : 24** = **1 : 3** u. s. f. Nach beendeter Hebung steht nun auf der Tafel:



Die Multiplication des Divisors **2 × 2 × 2 = 8**, und die des Dividendums **3 × 11 × 7 × 11 = 2541** kann bei kleinen Zahlen im Kopfe, bei größeren rechts unten auf der Tafel vorgenommen werden; Divisor wird dann, wie oben in der Zeichnung geschehen, links, Dividendum rechts von dem vertikalen Trennungsstriche aufgesetzt; dahinter Theilungsstrich; Division; der Rest (hier ⅝ ₰) wird als Bruch, oder aufgelöset in derselben Reihe angesetzt.

Zins-Rechnung.

a) Ein Capital von 57350 ₰ ist zu $3\frac{1}{2}$ % ausgeliehen; wie viel Zinsen trägt es in $7\frac{1}{2}$ Jahren? — Aufsatz:

$$\begin{array}{lllll} 2 & \overset{2}{\cancel{100}} & : & 57350 & = \overset{7}{\cancel{3\frac{1}{2}}} : x \\ 2 & 1 & : & \underset{3\ \cancel{15}}{\cancel{7\frac{1}{2}}} & = x : y \end{array}$$

100 : 57350 = 10 : 5735
10 : 15 = 2 : 3

Divisor: $2 \times 2 \times 2 = 8$

Dividend: $5735 \times 3 = 17205 \times 7 = 120435 : 8$
$= 15054$ ₰
$\frac{3}{8} = 9$ ℳ.

Wie die Lösung mittelst der Formel $\frac{cpn}{100} = z$ ausgeführt wird, s. w. u.

b) Von einem Capitale von 3720 ₰ werden monatlich 12 ₰ 22 ℳ Zinsen erhoben; welches ist der Zinsfuß?

$$372\cancel{0} ₰ : 10\cancel{0} ₰ = \overset{155}{\cancel{12}\tfrac{11}{12}} : x.$$
$$\cancel{12}$$
$$1 \text{ Monat} : \cancel{12} \text{ Mt.} = x : y$$

3720 : 100 = 372 : 10
12 : 12 = 1 : 1

Divisor: 372

Dividend: $10 \times 155 = 1550 \mid 4$

$$\frac{62}{372} = \tfrac{1}{6} \text{ p.Ct.}$$

Zins-auf-Zins-Rechnung.

Ein Capital von 1250 ₰ zu 5% auf $3\frac{1}{2}$ Jahr, Zinsen auf Zinsen? — Aufsatz:

$$\begin{array}{lllll} & \overset{2\cancel{0}}{\cancel{100}} & : & \overset{21}{\cancel{105}} & = \overset{1}{\cancel{1250}} : x \\ 4 & \overset{\cancel{20}}{\cancel{100}} & : & \overset{21}{\cancel{105}} & \\ 4 & \overset{\cancel{20}}{\cancel{100}} & : & \overset{21}{\cancel{105}} & \\ 8 & \overset{\cancel{40}}{\cancel{200}} & : & \overset{41}{\cancel{205}} & \end{array}$$

100 : 105 = 20 : 21
200 : 205 = 40 : 41
20 : 1250 = 2 : 125
125 theilbar durch 5 = 25
20 : 125 = 4 : 25
20 : 25 = 4 : 5
40 : 5 = 8 : 1

Divisor: $2 \times 4 \times 4 \times 8 = 256$

Dividend: $21 \times 21 \times 21 \times 41 = 379701 : 256 = 1483$ ₰

256 : 8 = 32
24 : 8 = 3

4 : 32 = 8
4 : 12 = 3

53
× 3
32 : 159 | 4 Sgr.
31
× 3
8 : 93 | $11\frac{5}{8}$ ₰
$\frac{5}{8}$

Die kürzere Ausführung der Zins-Zins-Rechnung mittelst Logarithmen, s. u. »Progressionen« und »Logarithmen.«

Rabatt-Rechnung.

Der Ladenpreis für verschiedene Bücher beträgt 18 Thlr. 20 Sgr.; man bekommt $12\frac{1}{2}$ % Rabatt; wie viel wird dafür bezahlt, und wieviel beträgt der Rabatt? — Aufsatz:

4
~~100~~ Thlr. : ~~$87\frac{1}{2}$~~ = ~~$18\frac{5}{6}$~~ : x
2 ~~175~~ 113
6 7

100 : 175 = 4 : 7

Divisor: 4 × 2 × 6 = 48

Dividend: 7 × 113 = 791 : 48 | 16 Thlr.
2 : 23 | $11\frac{1}{2}$ Sgr.

18 Thlr. 20 Sgr. —
16 » 11 » 6 ₰
2 Thlr. 8 Sgr. 6 ₰

Discont-Rechnung.

Ein Wechsel von 330 Thlr. fällig nach 1 Monat 25 Tagen, wird mit $\frac{2}{3}$ % Discont pro Monat verkauft; wie viel erhält man dafür? — Aufsatz:

11 ~~2~~ 1
100 Thlr. : ~~330~~ = $\frac{2}{3}$: x
1 ~~3~~
1 Monat : ~~$1\frac{5}{6}$~~ Mt.
3 ~~6~~ 11

100 : 330 = 10 : 33
3 : 33 = 1 : 11
2 : 6 = 1 : 3

Divisor: 3 × 10 = 30

Dividend: 11 × 11 = 121 : 30 = 4 Thlr.
1
30 : 288 | 9 ₰
18
$\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ ₰

330 Thlr. — —
4 » — $9\frac{3}{5}$ ₰
325 Thlr. 23 Sgr. $2\frac{2}{5}$ ₰

Termin-Rechnung.

N. kauft einen Garten für 2000 Thlr.; davon soll er 200 Thlr.

baar bezahlen, den Rest aber in 6 Terminen, nämlich alle 4 Monate $1/6$ des Capitales. Nun wünscht er das ganze Capital auf einmal zu bezahlen; wann muß dieses geschehen? — Aufsatz:

$4 \times 4 = 16$	= Termin I.	
$4 \times 8 = 32$	—— II.	in 336 Monaten würde der
$4 \times 12 = 48$	—— III.	mögl. Gewinn = 100 ₰ sein.
$4 \times 16 = 64$	—— IV.	(NB. Nur die 2te und 3te
$4 \times 20 = 80$	—— V.	Columne braucht auf unserer
$4 \times 24 = 96$	—— VI.	Tafel ausgeführt zu werden.)
336		

$\cancel{2600}$ ₰ : $\cancel{100}$ ₰ = 336 Monat : x

26 : 336 | 12 Monate.

$24/26 = 24 \times 30 = 720$

26 : 720 | 27 Tage.

$18/26 = 9/13$ Tage.

Thara-Rechnung.

1) Wie viel kostet eine Kiste Indigo, brutto 575 ℔, thara 42 ℔; das ℔ netto 6 fl. 15 kr. C. M. — Aufsatz:

$$\overset{}{\cancel{1}}_{4}\text{ ℔} : 533\text{ ℔} = \overset{25}{\cancel{6^1/_4}}\text{ fl.} : x \qquad \begin{array}{r} 575 \\ -42 \\ \hline 533 \end{array}$$

Divisor: 4

Dividend: $533 \times 25 = 13325 : 4 = 3331$ fl.

$1 = 60 : 4 = 15$ kr.

2) Für eine Parthei Waaren bezahlt N. in Hamburg 810 Mark, und zwar 100 ℔ netto zu $31\,1/4$ Mark; es waren 12% Thara und 1% Gutgewicht gerechnet; wie viel hat die Waare brutto gewogen?

Erster Aufsatz:

$$\underset{\underset{1}{\cancel{125}}}{\cancel{31^1/_4}}\text{ Mk.} : \overset{162}{\cancel{810}}\text{ Mk.} = \underset{4}{\overset{4}{\cancel{100}}} : x \qquad \underset{5}{} \qquad \begin{array}{r} 125 : 100 = 5 : 4 \\ 5 : 810 = 1 : 162 \end{array}$$

$162 \times 4 \times 4 = 2592$ Pfund.

Zweiter Aufsatz:

88 : 100 = 2592 : x $\qquad$ 100 — 12 = 88

88 : 259200 | 2945 ℔

40 ist weniger als die Hälfte von 88, also = 0.

Dritter Aufsatz:

$99 : 100 = 2945 : x$ $\qquad\qquad 100 - 1 = 99$

$99 : 294500 \mid 2975$ ℔

74 ist mehr als die Hälfte von 99, also $= + 1$ ℔

Fusti-Rechnung.

N. kauft 17 Decher 4 Stück Felle Rauhwerk, den Decher zu $12\frac{1}{2}$ ℛ. Es finden sich 17 sehr schadhafte Felle; für diese 17 bezahlt er nur die Hälfte des bedungenen Preises; wie viel muß er also bezahlen?

1 Decher $= 10$ Stück; also $10 \times 17 + 4 = 174 - 8\frac{1}{2} = 165\frac{1}{2}$.

Aufsatz:

$$\begin{array}{llll} & & 331 & 25 \\ 2 & \cancel{10} : & \cancel{165}\frac{1}{2} = & \cancel{12}\frac{1}{2} : x \\ & 2 & & 5 \\ & 2 & & \end{array} \qquad 10 : 25 = 2 : 5$$

Divisor: $2 \times 2 \times 2 = 8$

Dividend: $331 \times 5 = 1655 : 8 = 206$ ℛ

$\frac{7}{8} = 21$ ℊ

Gewinn- und Verlust-Rechnung.

N. verkauft $7\frac{1}{2}$ Centner Waare zu 175 ℛ, und gewinnt $16\frac{2}{3}$ %; wie theuer ist der Centner eingekauft, und wie viel ist gewonnen?

Erster Aufsatz:

$$\begin{array}{llll} & \cancel{350} & 50 & \\ 1 & \cancel{116}\frac{2}{3} : & \cancel{100} = & \cancel{175} : x \\ & \cancel{2} & 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 350 : 175 = 2 : 1 \\ 2 : 100 = 1 : 50 \end{array}$$

$3 \times 50 = 150$ abgez. von $175 = 25$ ℛ Gewinn.

Zweiter Aufsatz:

$$\begin{array}{l} \cancel{7}\frac{1}{2} \text{ Centner} : 1 \text{ Ctnr.} = 150 : x \\ 15 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2 \end{array}$$

Divisor $= 15$.

$2 \times 150 = 300 : 15 = 20$ ℛ $= 1$ Centn.

Gesellschafts-Rechnung.

Die Bürger einer Stadt sind nach ihrem Vermögen in 5 Klassen getheilt. Wenn die erste Klasse 1 ℛ zahlt, zahlt die zweite 18 ℊ, die dritte 10 ℊ, die vierte 4 ℊ und die fünfte 2 ℊ. Die erste Klasse zählt 30 Bürger, die zweite 60, die dritte 96, die vierte 135 und die fünfte 270. Nun wird der Stadt eine Kriegssteuer von 4000 ℛ auferlegt; wie viel muß nach obiger Ordnung der einzelne Bürger jeder Klasse beitragen?

a = 30 = 1 — 30 ℛ   1 × 30 = 30
b = 60 = $^3/_4$ — 45 »   4 : 60 = 1 : 15 = 3 × 15 = 45
c = 96 = $^5/_{12}$ — 40 »   12 : 96 = 1 : 8 = 5 × 8 = 40
d = 135 = $^1/_6$ — 22½ »   6 in 135 = 22$^3/_6$ = 22½
e = 270 = $^1/_{12}$ — 22½ »   12 in 270 = 22$^6/_{12}$ = 22½
160

a. ~~160~~ : ~~4000~~ = 1 : x
4   100   4 : 100 | 25 ℛ

b. 4 : 100 = $^3/_4$: x
4   4 × 4 = 16 : 300 | 18 ℛ 18 ℳ
3 × 100 = 300

c. 4 : 100 = $^5/_{12}$: x
12
48 : 500 | 10 ℛ 10 ℳ
$^{20}/_{48}$ = $^5/_{12}$ ℛ = 10 ℳ

d. 4 : 100 = $^1/_6$: x
6
24 : 100 | 4 ℛ 4 ℳ
$^4/_{24}$ ℛ = $^1/_6$ = 4 ℳ

e. 4 : 100 = $^1/_{12}$: x
12
48 : 100 | 2 ℛ 2 ℳ
$^4/_{48}$ = $^1/_{12}$ ℛ = 2 ℳ

Gold- und Silber-Rechnung.

Ein Stück Silber wiegt 2¼ Mark, und enthält 4½ Loth Kupfer; von welchem Gehalte ist es?

1 Mark = 16 Loth; 36 Lth. — 4½ Lth. = 31½ Lth.

1   63
~~36~~ : ~~31~~½ = ~~16~~ : x   2 : 16 = 1 : 8
~~4~~ ~~2~~   7   ~~8~~   36 : 63 = 4 : 7
1   2   4 : 8 = 1 : 2
2 × 7 = 14löthig.

Hier wurde gefunden, wie viel reines Silber in 36 Loth und in 1 Mark ist.

$$\begin{array}{l} 2 \qquad\quad 9 \\ \cancel{36}\ \text{Lth.} : \cancel{4\tfrac{1}{2}}\ \text{Lth.} = 16\ \text{Lth.} : x \\ 4 \qquad\quad 1 \end{array} \qquad 9 : 36 = 1 : 4$$

$$2 \times 4 = 8 : 16 \mid 2\ \text{Loth}; \quad \begin{array}{r} 16 \\ -\ 2 \\ \hline 14\ \text{Loth.} \end{array}$$

Hier wurde gefunden, wie viel Kupferzusatz auf eine Mark reinen Silbers zugegen ist.

2 Mrk. 4 Lth. $= 2\frac{1}{4}$ Mrk.; 1 Mrk. $15\frac{1}{2}$ Lth. $= \frac{31}{32} + \frac{32}{32} = \frac{63}{32}$.

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 1 \\ \cancel{2}\tfrac{1}{4}\ \text{Mrk.} : \tfrac{63}{32}\ \text{Mrk.} = \cancel{16}\ \text{Lth.} : x \\ 1\ \ \cancel{9} \qquad\qquad \cancel{4}\ \ 2 \\ \cancel{32} \qquad 7 \\ \ \cancel{2}\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 : 32 = 1 : 2 \\ 2 : \ 4 = 1 : 2 \\ 9 : 63 = 1 : 7 \end{array}$$

$$2 \times 7 = 14\ \text{Loth.}$$

Hier wurde gefunden, wie viel reinen Silbers in 1 Mark dieses unreinen Silbers ist.

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad 2 \\ \text{Probe: } \cancel{14}\ \text{Loth} : \cancel{16}\ \text{Lth.} = \tfrac{\cancel{63}}{\cancel{32}} : x \\ \qquad\qquad \cancel{32} \qquad 1 \qquad\quad 9 \\ \qquad\qquad\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 : 32 = 1 : 2 \\ 14 : 63 = 2 : 9 \end{array}$$

$$2 \times 2 = 4 : 9 \mid 2\tfrac{1}{4} = 2\ \text{Mark}\ 4\ \text{Loth.}$$

Alligations-Rechnung.

Ein Weinhändler vermischt drei Sorten Wein, das Quartier zu 7, 8 und 9 kr, aber nicht in gleichen Verhältnissen; die erste verhält sich zur zweiten = 5 : 4; die zweite zur dritten = 3 : 2. Wie theuer kommt der Anker dieser Mischung?

$3 : 2 = 4 : x$; $2 \times 4 = 8 : 3 = 2\frac{2}{3}$, also:

a Sorte = 5 zu 7 kr
b — = 4 - 8 kr
c — = $2\frac{2}{3}$ - 9 kr

Erster Aufsatz:

$$\begin{array}{lll} 1\ \text{Qt.} : 5\ \text{Qt.} = 7\ \text{kr} : x & = 5 \times 7 = & 35\ \text{kr} \\ 1\ \ - \ : 4\ \ - \ = 8\ - \ \ — & = 4 \times 8 = & 32\ - \\ \cancel{1}\ \ - \ : \cancel{2\tfrac{2}{3}}\ - \ = \cancel{9}\ - \ \ — & = 3 \times 8 = & 24\ - \\ \cancel{3} \qquad\ 8 \qquad\quad 3 & & \overline{91\ \text{kr}} \\ 1 \quad \overline{11\tfrac{2}{3}\ \text{Qt.}} & & \end{array}$$

Zweiter Aufsatz:

$$\begin{array}{llll} & & \ 8 & \\ \cancel{11}\frac{2}{3}\text{ Qt.} & : & \cancel{40}\text{ Qt.} & = \cancel{91}\ ℳ : x \\ \cancel{35} & & \ 3 & \quad\ 13 \\ \cancel{7} & 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 35 : 40 = 7 : 8 \\ 7 : 91 = 1 : 13 \end{array}$$

$$3 \times 8 \times 13 = 312 : 24 = 13\ ℛ$$

Factorei-Rechnung.

Drei Kaufleute überliefern einem Factor **2700** ℛ; A. **600** ℛ, B. **900** ℛ, C. **1200** ℛ, und versprechen ihm von dem künftigen Gewinne **10%**. Mit ihrer Einwilligung legt er auch **300** ℛ mit ein, und gewinnt überhaupt **900** ℛ. Wie viel kommt nun einem Jeden zu?

$10\ \%$ von 900 ℛ $= 90 = 810$ ℛ. $\qquad 10 : 1 = 900 : x$

$600 + 900 + 1200 + 300 = 3000$ ℛ

Aufsatz:

$\cancel{3000} : \cancel{600} = 810 : x \qquad\qquad 3000 : 600 = 30 : 6$

$\ 5 \qquad\ 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 30 : 6 = 5 : 1$

$5 : 810 \mid 162$ ℛ A.

$\cancel{3000} : \cancel{900} = 81\cancel{0} : x \qquad\qquad 3000 : 900 = 30 : 9$

$\ 1 \qquad\ 3 \qquad\quad 3 \times 81 = 243$ ℛ B. $\qquad 30 : 810 = 3 : 81$

$3 : 9 = 1 : 3$

$\cancel{3000} : \cancel{1200} = 81\cancel{0} : x$

$\ \cancel{3} \qquad 4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3000 : 1200 = 30 : 12$

$\ 1 \qquad\qquad 4 \times 81 = 324$ ℛ C. $\qquad 30 : 810 = 3 : 81$

$3 : 12 = 1 : 4$

$\cancel{3000} : \cancel{300} = 81\cancel{0} : x$

$\ \cancel{3} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3000 : 300 = 30 : 3$

$81 + 90 = 171$ ℛ dem Factor. $\qquad 3 : 3 = 1 : 1$

Zur Verdeutlichung wollen wir die beiden letzten Beispiele nochmals auf unserer Tafel vornehmen.

Bei dem Beispiele für Alligationsrechnung wird aufgesetzt: Aufsatz der Aufgabe:

a qt 7 g ... 5 $\qquad$ a „ b ... 5 „ 4 „ $\Big\}$ 40 qt

b „ 8 „ ... 4 $\qquad$ b „ c ... 3 „ 2 „

c „ 9 „ ... 2 „ 2 „ 3 „

Nun wird calculirt: a Sorte ist = 5, b Sorte = 4, wie ist c Sorte? 3 : 2 = 4 : x; also $x = \frac{2 \times 4}{3} = 2\frac{2}{3}$; diese

Verhältnisse werden (wie hier schon geschehen) neben a, b, c gesetzt. Nun neuer Aufsatz darunter:

1 qt : 5 qt ∴ 7 g :
1 . : 4 . • 8 . :
1 . : $2^2/_3$. • 9 . :

$11^2/_3$

Die Summe $11^2/_3$, als zur folgenden Proportion nöthig, wird rechts oben auf der Tafel angesteckt; hier aber zu den Mutationen der Raum freigelassen.

1 qt : 5 qt ∴ 7 g : Das zu suchende Glied x braucht auf der Tafel nicht durch ein aufgestecktes x bezeichnet zu werden. — 5 × 7 = 35 g wird in dieser Reihe weiter angesteckt; also ∴ 35 g . Darunter

1 : 4 ∴ 8 : ∴ 32 . (4 × 8 = 32) Darunter
1 : ~~2~~ . ~~2~~ ∴ ~~3~~ ∴ ~~9~~ :
~~3~~ . 8 3 . ($2^2/_3$ wird gleichnamig zu $^8/_3$ umgewandelt, also 2 . 2 ∴ 3 weggenommen, und dicht vor das = Zeichen, auf die Stelle der 3 die 8 gesetzt, der Nenner 3 unter die 1; die 3 wird gegen die 9 gehoben, also vorn die 3 fort, und aus 9 wird eine 3; 3 × 8 = 24, welche hinter die letzte Proportion gesetzt wird.

Der erste Calcul-Aufsatz wäre also nach Beendigung desselben:

1 qt : 5 qt ∴ 7 g ••• 35 g
1 . : 4 . • 8 . • 32 .
1 . : 8 • 3 . • 24 .

Nun wird die Summe der Quartiere und die Summe des Werthes darunter gesetzt, und daraus der zweite Aufsatz gebildet:

11 . 2 ∴ 3 qt : 40 qt ∴ 91 :

Zunächst wird $11^2/_3$ in den gleichnamigen Bruch $^{35}/_3$ verwandelt, aus $11^2/_3$ also 35 gemacht, der Nenner 3 unter 40 gesetzt; 35 gegen 40 gehoben, aus 35 wird 7, aus 40 nun 8; 7 gegen 91 gehoben, 7 fort (= 1), 91 in 13 verwandelt; nun steht 8 ∴ 13; 3 × 8 × 13 = 312, welche hinter 3 . ge-
3 .
setzt werden kann; diese Gr. zu Thalern gemacht, $\frac{312}{24} = 13$ ₰, welche nach einem Theilungsstriche hinter 312 gesetzt werden.

Da 24 × 13 schon die Thalerzahl vorweg angiebt, bedarf es nur der Bezeichnung von 13 t. Der letzte Aufsatz wäre demnach nach Beendigung des Calculs verändert in:

1 qt •. 8 qt ••• 13 g •.
3 •. 312 ⁝ 13 t

Das Beispiel der Factorei-Rechnung wird auf folgende Art behandelt: Aufsatz der Aufgabe; die 6 ersten Reihen links oben auf der Tafel:

10 :• 900 t

a 600 t
b 900 •.
c 1200 •.
d 300 •.
•••••••••
3000 •.

Rechts oben auf der Tafel wird die erste Proportion aufgesetzt: 10 : 1 = 900 : x; da x = 90 ist, wird auf diese Stelle 90 gesetzt; von 900 wird 90 subtrahirt, unter 900 also 810 aufgesteckt. 10 : 1 = 900 : 90 •.
810 •.

Die Summe 3000 in der 6ten Reihe wird zur Berechnung der nun folgenden 4 Proportionen gebraucht; das Resultat dem a, b, c, d in der 2ten bis 4ten Reihe hinter t angehängt.

Aufsatz: 3000 •. 600 ••• 810 •. x

Zunächst werden zwei Nullen der 600 gegen 2 dito der 3000 gehoben, aus 3000 wird durch Herabrücken gegen das Verhältnißz. 30, aus 600 durch Herabrücken gegen das Gleichheitszeichen 6 gemacht. Nun kann die 0 der 30 gegen die 0 der 810 gehoben werden, dann 3 gegen 6 = 2, nun wäre 2 × 81 = 162; oder die 6 wird gegen 30 gehoben = 5, und nun 5 : 810 = 162; das Resultat 162 t wird oben in der 2ten Reihe hinter t gesetzt. Jetzt wird der zweite Satz b in Berechnung genommen; also 3000 : 900 = 810 : x. Ebenso werden 2 Nullen gegen 2 Nullen, die restirende 0 der 30 gegen die der 810 gehoben, 3 gegen 9, also 3 × 81 = 243, welche oben in der dritten Reihe hinter t gesetzt wird. — Ebenso wird der 3te Satz c behandelt. — Im 4ten Satze d wird zuletzt 3 gegen 3 gehoben, Rest 81 + 90 (von rechts oben herabgeholt) = 171 t. Das Gewinnquantum steht nun oben in der 2ten bis 4ten Reihe neben der jedweden Capitalanlage.

Man sieht, wie wenig Raum diese Berechnung auf unserer Tafel fordert; aber auch, daß der Rechner die Aufgabe ſtets klar im Kopfe haben muß, da er auf der Tafel nur die einzelnen Zahlenpoſten wiederfindet.

Daß dieſes Beiſpiel auch leicht im Kopfe zu berechnen iſt, unterliegt keinem Zweifel; zur Uebung muß mit leichten Exempeln angefangen werden. Wir wollen ein Beiſpiel gleicher Art hieherſetzen, welches im Kopfe zu löſen wohl einen ſeltenen Kopfrechner fordern möchte.

Zwei Kaufleute A und B, zu Berlin und Braunſchweig, und ein dritter C, zu Nürnberg, geben einem Factor D zu Hamburg ein jeder ein Capital, um mit der Totalſumme ein gemeinſchaftliches Geſchäft zu machen; ſie erlauben dem Factor, ſelbſt eine beliebige mäßige Summe hinzuzufügen, und den 4ten Theil des Gewinnes dafür zu beziehen; von dem ganzen Gewinne verſprechen ſie dem Factor 7 Procent. Wiviel bekommt A, B, C und D?

A	giebt	7955 ℛ 16 ℊ	Preuß. Ct.	Der Gewinn beträgt:
B	—	13250 » 20 ℊ	— —	5572 fl. 20 kr. rheinl.
C	—	11780 fl. 40 kr. rheinl.		u. 3785 Mark Banco.
D	—	3790 Mark Banco.		

Hier werden zunächſt die Reductionen auf gleichnamige Größen vorgenommen:

Summe C: 12 : 11780 ⅔ = 7 : x = 6872 ℛ 1 ℊ 4 ₰ Pr. Ct.
Summe D: 18 : 3790 = 7 : x = 1473 ℛ 21 ℊ 4 ₰.
Der Gewinn: 12 : 5572 ⅓ = 7 : x = 3250 ℛ 12 ℊ 8 ₰.
dito 18 : 3785 = 7 : x = 1471 ℛ 22 ℊ 8 ₰.
Totalſumme der Einlage in Preuß. Ct. = 29552 ℛ 10 ℊ 8 ₰.
dito des Gewinnes in dito = 4722 ℛ 11 ℊ 4 ₰.

Aufſatz:

A 7655 ⅔ t 7 p. 4722 17/36 t
B 13250 5/6 \
C 6872 1/18 \
D 1473 8/9 \

29552 4/9 \

Nun werden die Procente für D dem Gewinne abgezogen:

100 : 7 = 4722 17/36 : x = 330 ℛ 13 ℊ 9 ₰ Pr. Ct.; 1/25 ₰ wird hiebei vernachläſſiget, und hat dieſes keinen Einfluß.

Reſt des Gewinnes für A, B, C und D = 4391 ℛ 21 ℊ 7 ₰ Pr. C.

1ster Aufsatz für A:

$29{,}552\,{}^4\!/_9 : 7955\,{}^2\!/_3 = 4391\,{}^{259}\!/_{288} : x.$

Die Brüche werden beseitiget: $4391 \times 288 + 259 = 1{,}264{,}867$; $7955 \times 3 + 2 = 23{,}867 \times 3 = 71601.$

$29{,}552 \times 9 + 4 = 265{,}972 \times 288 = 76{,}599{,}936.$

Also 2ter Aufsatz für A:

$\overset{a}{76{,}599{,}936} : \overset{b}{71{,}601} = \overset{c}{1{,}264{,}867} : \overset{d}{x}.$

$b \times c = \dfrac{90{,}565{,}742{,}067}{76{,}599{,}936} = 1182$ ℱ

1ster Rest: $\dfrac{24{,}617{,}715}{3{,}191{,}664} = 7$ ℳ. Divisor div. d. 24.

2ter Rest: $\dfrac{2{,}276{,}067}{265{,}972} = 8$ ₰. Divisor div. d. 12.

3ter Rest: ${}^{148291}\!/_{265972}$ ₰.

1ster Aufsatz für B:

$\overset{a}{76{,}599{,}936} : \overset{b}{13{,}250\,{}^5\!/_6} = \overset{c}{1{,}264{,}867} : \overset{d}{x}.$

Der Bruch gehoben: $13{,}250 \times 6 + 5 = 79{,}505 \times 3 = 238{,}515.$
$a \times 2 = 153{,}199{,}872.$ $b \times c = 301{,}689{,}752{,}505.$

2ter Aufsatz für B:

$\overset{a}{153{,}199{,}872} : \overset{b}{301{,}689{,}752{,}505} : 1969$ ℱ.

1ster Rest: $\dfrac{39{,}204{,}537}{6{,}383{,}328} = 6$ ℳ. Divisor div. d. 24.

2ter Rest: $\dfrac{904{,}569}{531{,}944} = 1$ ₰.

3ter Rest: ${}^{372625}\!/_{531944}$ ₰.

1ster Aufsatz für C:

$\overset{a}{76{,}599{,}936} : \overset{b}{6872\,{}^1\!/_{18}} = \overset{c}{1{,}264{,}867} : \overset{d}{x}.$

Der Bruch gehoben: $6872 \times 18 + 1 = 123{,}697.$ $a \times 2 = 153{,}199{,}872.$ $b \times c = 156{,}460{,}253{,}299.$

2ter Aufsatz für C:

$153{,}199{,}872 : 156{,}460{,}253{,}299 : 1021$ ℱ.

1ster Rest: $\dfrac{43{,}183{,}987}{6{,}383{,}328} = 6$ ℳ. Divisor div. d. 24.

2ter Rest: $\frac{4,884,019}{531,944} = 9$ ₰. Divisor div. d. 12.

3ter Rest: $^{96523}/_{531944}$ ₰.

1ster Aufsatz für D:

$\overset{a}{76,599,936} : \overset{b}{1473^8/_9} = \overset{c}{1,264,867} : \overset{d}{x}.$

Der Bruch gehoben: $1473 \times 9 + 8 = 13,265$. Der Divisor ist schon mit 9 multiplicirt; also $b \times c = 16,778,460,755$.

2ter Aufsatz für D:

76,599,936 ⁝ 16,778,460,755 ⁝ 219 ℛ.

1ster Rest: $\frac{3,074,771}{3,191,664} = 0.$ Divisor div. d. 24.

2ter Rest: $\frac{3,074,771}{265,972} = 11$ ₰

3ter Rest: $^{149079}/_{265972}$ ₰.

Summa:	A.	1182 ℛ	7 ℳ	8 ₰.	$^{148291}/_{265972}$ ₰.
—	B.	1969 »	6 »	1 »	$^{372625}/_{531944}$ »
—	C.	1021 »	6 »	9 »	$^{96523}/_{531944}$ »
—	D.	219 »	- »	11 »	$^{149079}/_{265972}$ »

Summa: 4391 ℛ 21 ℳ 5 ₰.

Reduction der Brüche: Nenner A = D und B = C.

$148,291 \times 2 = 296,582$
$149,079 \times 2 = 298,158$
96,523
372,625

531,944 : 1,063,888 | 2 ₰.

Also: 4391 ℛ 21 ℳ 7 ₰ + der 7 Procent des Factors = 330 ℛ 13 ℳ 9 ₰; Total = 4722 ℛ 11 ℳ 4 ₰ Pr. Ct.

Dieses Beispiel, zu dessen genauer Berechnung ein geübter sehender Rechner wohl $1^1/_2$ Stunden, und wenn er Tinte und Feder anwendet, fast einen Bogen Papier gebraucht, kann ein ebenso geübter Blinder auf unserer großen Tafel, von 720 bis 840 Zahlenstellen (40 bis 42 horizontal, und 18 bis 20 vertikal, 6000 bis 7560 Löcher enthaltend), mit Leichtigkeit und Genauigkeit in zwei Stunden berechnen, wobei sich derselbe man=

chen Vortheiles, wie wir Sehenden, bedient. So z. B. giebt man dem Producte von c × 288 + 259, welches in den vier Sätzen unverändert bleibt, eine sichere Stelle in der oberen Reihe; dem Producte von a × 9 + 4 × 288, welches (einige geringe Multiplicationen ungerechnet) der Hauptdivisor bleibt, giebt man links in der oberen Reihe (der Multiplication wegen in der 4ten oder 5ten Stelle von links anfangend) einen sicheren Platz; (daß man bei freistehenden Zahlen nie das Endzeichen vergessen darf, versteht sich von selbst). Sehr zweckmäßig, jedem Irrthume vorbeugend und Zeit ersparend ist es, wenn man sich zu den großen Multiplicationen einer anderen kleineren Tafel bedient, von welcher die Producte auf die richtige Stelle der großen Tafel übertragen werden (wie wir Sehenden uns hiezu einer Schiefertafel oder eines anderen Papieres zu bedienen pflegen); man kann alsdann, im Falle eines Fehlers, diesen leichter auffinden; erleichternd ist es wenigstens, wenn man hier die Producte unverändert unter den Fingern behalten kann. Indessen ist dieses nicht durchaus nothwendig, da man auf der großen Tafel rechts abwärts Platz genug hat, 6 und mehrstellige Multiplicationen auszuführen, welche man, nach Versetzung des richtigen Productes in die entsprechende Stelle, sogleich wieder fortnimmt, (in welchem Falle die ganze Arbeit freilich etwas länger dauert). Die Quotienten nebst ihren Brüchen setzt man den entsprechenden Posten A, B, C, D sogleich an, welche man links, in den 7 bis 8 unteren Reihen angelegt hat; nach jeder Division nimmt man dann Dividendum, Rest und Quotienten wieder fort. — Daß sich jeder Rechner an eine bestimmte Ordnung der Aufsätze und der Ausführung der einzelnen Operationen von Anfang an gewöhne, ist wesentlich erforderlich; dann ist jede Zahl leicht wieder aufgefunden, und der blinde Rechner führt die schwierigsten Calcule mit einer Erstaunen erregenden Präcision aus.

Nun noch ein Beispiel einer Kettenrechnung, welches ganz allein im Kopfe (ohne Hülfe eines Sehenden, der die einzelnen Posten wiederholt, und die Lösungen niederschreibt) wohl schwerlich ein Blinder berechnen möchte; ein im Ganzen nicht schwieriges, alltägliches Beispiel, das nur Genauigkeit im Aufsatze verlangt.

Amtmann Karg erntet von 283 $^7/_9$ Morgen zur Hälfte Waizen, zur Hälfte Roggen; auf jedem Morgen erntet er durchschnittlich $18\frac{1}{2}$ Stiege; er verkauft den Waizen zu $5383\frac{1121}{1728}$ ℞ Conv. M., den Roggen zu $3772\frac{1069}{1728}$ ℞ Conv. M.; den Wispel (zu 40 Himpten) Waizen zu $55\frac{25}{132}$ ℞ Gold; den Wispel Roggen zu $38\frac{39}{132}$ ℞ Gold (den Louisd'or zu $5\frac{1}{2}$ ℞ C. M.).

a) Wie viel Himpten erntet er aus einer Stiege?

b) Wie viel Himpten von einem Morgen?

c) Wie viel kostet ein Himpten Waizen, 1 H. Roggen C. M.?

Hier muß zunächst die Morgenzahl $283\frac{7}{9}$ getheilt, und, wie die anderen Brüche, gelöset werden; $141\frac{8}{9} = 1277$ und 9; $18\frac{1}{2}$ Stiege = 37 u. 2; $5\frac{1}{2}$ ℞ C. M. = 11 u. 2; $55\frac{25}{132}$ = 7285 u. 132; $5383\frac{1121}{1728}$ = 9,302,945 u. 1728.

1ster Aufsatz:

a) Wie viel Himpten erntet er aus einer Stiege?

Frage Himpten : 1 Stiege?
37 Stiegen : 1 Morgen 2
1728. 1277 Morgen : 9,302,945 ℞ Conv. M. 9
11 ℞ Gold : 5 ℞ Gold. 2
7285 ℞ Gold : 40 Himpten. 132

Hier wäre $37 \times 1277 \times 1728 \times 11 \times 7285$ der Divisor; und $9302945 \times 2 \times 9 \times 5 \times 2 \times 40 \times 132$ das Dividendum. Die weitläufige Multiplications- und Divisions-Operation läßt sich aber abkürzen; wir heben 9 : 1728 = 1 : 192; 1277 : 9302945 = 1 : 7285; 7285 : 7285 = 0; 40 : 192 = 5 : 24; 11 : 132 = 1 : 12; und endlich 12 : 24 = 1 : 2; und behalten als Divisor 37; als Dividendum $2 \times 5 \times 5 = 50$; also 37 : 50 = $1\frac{13}{37}$ Himpten aus einer Stiege.

b) Wie viel Himpten von einem Morgen?

Frage Himpten : 1 Morgen?
1728. 1277 Morgen : 9302945 ℞ C. M. 9
11 ℞ C. M. : 5 ℞ Gold. 2
7285 ℞ Gold : 40 Himpt. 132

Also $1277 \times 1728 \times 11 \times 7285$ = Divisor; $9302945 \times 9 \times 5 \times 2 \times 40 \times 132$ = Dividendum. Wir heben: 1277 : 9302945 = 1 : 7285; 7285 : 7285 = 0; 9 : 1728 = 1 : 192; 40 : 192 = 5 : 24; 11 : 132 = 1 : 12; 12 : 24 = 1 : 2; 2 : 2 = 0, und behalten $5 \times 5 = 25$ Himpten auf einem Morgen.

c) Wie viel kostet 1 Himpten Waizen in Conv. Münze?
Frage Thaler C. M. : 1 Himpten.
132 40 Himpt. : 7285 ₰ C. M.
2 5 ₰ Gold : 11 ₰ C. M.
Also: $132 \times 40 \times 2 \times 5 =$ Divisor, und 7285×11 ₰. Dividendum; wir heben: $11 : 132 = 1 : 12$, und $40 : 7285 = 8 : 1457$; also: $8 \times 12 \times 2 \times 5 = 960 =$ Divisor; $1457 =$ Dividendum;

960 : 1457 | 1 ₰.
40 : 497 | 12 ℳ
17
3

10 : 51 | $5^1/_{10}$ ₰.
1

24 : 960 | 40
$12 : 40 = 3 : 10$

Ebenso wird mit der Berechnung des Roggens verfahren. —

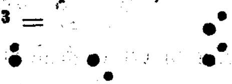
Doch genug der Beispiele. Klar liegt vor, daß diese Lösungsweise, welche dem Rechner große Vortheile gewährt, mittelst unserer Tafel auch dem Blinden mit großem Vortheile zugänglich wird.

VI. Potenz- und Wurzelrechnungen.

Potenz oder Dignität einer Größe oder Zahl ist gleich dem Producte, worin nur diese Größe oder Zahl zwei- oder mehrmal als Factor vorkommt. Um also eine Größe oder Zahl zu einer Potenz zu erheben, wird ein Product von einer gegebenen Anzahl von Factoren gebildet, welche alle der gegebenen Größe gleichen. — Jeder dieser gleichen Factoren heißt die Wurzel (Grundzahl, Basis, radix); die Anzahl derselben Factoren heißt der Exponent der Potenz; ist dieser gerade, dann ist die Potenz ebenfalls eine gerade; umgekehrt, ungerade. — Die zweite Potenz heißt das Quadrat, $\sqrt[2]{}$; die dritte Potenz heißt der Cubus, $\sqrt[3]{}$; die vierte Potenz heißt das Biquadrat, $\sqrt[4]{}$; die sechste Potenz heißt der Bicubus, $\sqrt[6]{}$; u. s. f.

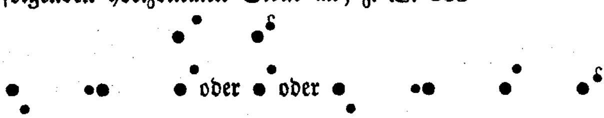
Das Quadrat der einzifferigen Zahlen hat 2 oder 1 Ziffer: $1^2 = 1$; $9^2 = 81$. Das Quadrat der zweizifferigen Zahlen hat 4 oder 3 Ziffern: $10^2 = 100$; $99^2 = 9801$. Das Quadrat der dreizifferigen Zahlen hat 6 oder 5 Ziffern: $100^2 = 10000$; $999^2 = 998001$ u. s. f.

Auf unserer Tafel setzt man den Wurzel-Exponenten entweder über die zu potenzirende Zahl in der Vertikalreihe darüber mit einer kleinen Nadel, in welchem Falle bei Rechnungen dieser Art über jeder Reihe eine Knopfreihe frei bleiben muß; z. B: 253^3 =

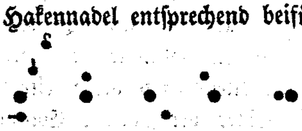


oder man bedient sich hier (was große Bequemlichkeit und Raumersparung gewährt) der Hakennadeln. Man drückt die Exponentenzahl durch eine der zu potenzirenden Zahl unmittelbar angesteckte Hakennadel aus, indem der Primknopf der Zahl sich auch auf den Exponenten (Hakennadel) bezieht, z. B. 513^2

Ist aber die Ziffer des Exponenten der zu potenzirenden Ziffer gleich, dann setzt man den Exponenten entweder mit einer kleinen oder einer Hakennadel über die Ziffer, oder (wohl am zweckmäßigsten) man steckt den Exponenten mit einer Hakennadel in der folgenden horizontalen Stelle an; z. B. 583^3



Soll aus einer Zahl oder Größe die Wurzel gezogen werden, dann setzt man zuerst das Wurzelzeichen (6•3 mit Spitzn.), und zwar einfach, wenn $\sqrt[2]{}$ gefordert wird; bei höheren Wurzeln wird dem Wurzelzeichen der Exponent der Wurzel hinzugefügt. Hier kann man die Spitznadel in 3 des Wurzelzeichens als Primknopf für die Exponent-Zahl betrachten, und diesem die Hakennadel entsprechend beifügen; z. B. $\sqrt[3]{2598}$



(was bei $\sqrt[7]{}$ nicht ausführbar ist, da der Original-Primknopf die 7te Stelle der Spitznadel in 2 einnimmt); oder (wohl am zweckmäßigsten) man setzt den $\sqrt{\ }$ Exponenten mit einer Hakennadel in der horizontalen Reihe neben das Wurzelzeichen; z. B. $\sqrt[7]{\ }$ 2957

In Ermangelung der Hakennadeln setzt man hinter den Wurzel-Exponenten einen Theilungsstrich (2•6 glatt); z. B. $\sqrt{\ }$7 | 2957

Zunächst müssen die Erhebungen der einstelligen Zahlen zur 2ten, 3ten und höheren Potenz geübt werden, so daß sie sich dem Gedächtnisse fest einprägen. Oefteres Berechnen und Aufsetzen derselben auf der Tafel, oder Darstellung derselben auf einer ektypographischen Tabelle, von welcher die Zahlen förmlich auswendig gelernt werden, sind mnemonische Hülfsmittel.

Die Potenzzahlen der 9 einzifferigen Zahlen liegen bei $\sqrt[2]{\ }$ zwischen 1 und 81, bei $\sqrt[3]{\ }$ zwischen 1 und 729, und bei $\sqrt[4]{\ }$ zwischen 1 und 6561 u. s. w. (S. u. die Potenztafel.)

Die **Wurzel** einer Zahl ist also diejenige Zahl, welche, zur 2ten oder nten Dignität erhoben, die gegebene Zahl ergiebt. — Die Zahl, welche anzeigt, die wievielste Wurzel gefunden werden soll, heißt der **Wurzel-Exponent**.

1) **Ausziehung der $\sqrt[2]{\ }$, der Quadratwurzel:**

Das Quadrat einer zweitheiligen Größe enthält: das Quadrat jedes Theiles und das doppelte Product aus beiden. $(a+b)^2$ ist $= a^2\ (2a:) + 2\,a \times b + b^2$.

Sehr zweckmäßig ist es, diese Formel dem Schüler klar zu machen, so daß sie denselben bei diesen Operationen stets leitet.

Aufsatz: Abtheilen der Zahlen in zweistellige Klassen; Aufsuchen der $\sqrt[2]{\ }$ der ersten Columne und Ansatz der ersten Wurzelzahl; Subtraction von der ersten Columne, wenn die Zahl nicht rein quadratisch ist; Hinzufügung der zwei Zahlen der 2ten Columne zu dem Reste; 2a darunter, so, daß die Einer von 2a unter die Zehner der zweiten Columne zu stehen kommen; knappe Division mit 2a, Quotient = b als zweite Wurzelzahl, und neben 2a unter die Einer der zweiten Columne gesetzt; dann 2a × b, das Product so darunter, daß Einer unter Einer der zweiten Columne zu stehen kommen; das Product abgezogen ꝛc.; z. B.:

12	61	74	14	41	35521,0
9					
3	61				
	65				
3	25				
	36	74			
	7	05			
	35	25			
	1	49	14		
		71	02		
	1	42	04		
		7	10	41	
		7	10	41	

Diese Tafel-Manier läßt sich auch auf unserer Tafel ganz ebenso ausführen, wenn wir anstatt der vertikalen Striche untereinandergesetzte große Nadeln (unter jeden Primknopf eine in 6) aufstecken; die Querstriche ergeben sich durch die freigelassenen Knopfreihen. Auch auf unserer kleinen (24 Stellen vertikal und 14 Stellen horizontal) Tafel ist dieses Exempel so ausführbar; die gefundene Wurzel kann man auch in der untersten Reihe anstecken. Z. B.:

Die Weitschweifigkeit dieser Ausführung liegt klar vor, und mag der Blinde einmal ein Beispiel auf diese Art ausführen, um die Tafel-Manier der Sehenden kennen zu lernen.

Wir bedürfen zur Ausziehung dieser 5stelligen Wurzel aus der 10stelligen Zahl nur 16 bis 17 Stellen horizontal, und 4 oder 5 Verticalreihen. Nach beendetem Calcul steht nur die Grundzahl, von der Wurzel durch = getrennt, in der ersten oder zweiten Reihe, der letzte Satz in der zweiten oder dritten, und das Duplicat der Wurzel in der dritten oder vierten Reihe.

Der Aufsatz geschieht in der oberen Reihe; Trennungen der Columnen sind nicht nöthig, da der Rechner die Grundzahl zuerst abmißt und theilt, und zu jedem Reste die entsprechenden zwei folgenden Zahlen herabholt. Kommen mehrere gleiche Ziffern in einer großen Zahl vor, dann kann man, um jedem möglichen Irrthume vorzubeugen, den Aufsatz in der zweiten Reihe von oben anfangen, und über die je zweite Zahl, von rechts, einen großen Knopf in 6 des über dieser Zahl stehenden Primknopfes setzen. Am Ende wird das =zeichen (⁝) gesetzt, hinter welchem die einzeln gefundenen Wurzelzahlen angelegt werden. (Kommt hier eine Null vor, dann kann man diese, bis zu dem Ansatze der folgenden Wurzelzahl, durch eine dem Nullknopfe irgendwo angefügte Hakennadel dem Vergessen entziehen.) Also:

$\sqrt{}^{2}$ ⁝ 1 2 6 1 7 4 1 4 4 1 ⁝

Der Zeigefinger der linken Hand erkennt die 12; a^2, $3 \times 3 = 9$; die rechte Hand setzt die 3 hinter ⁝, die 9 unter die 12, oder man subtrahirt in Gedanken, und setzt den Rest 3 unter die 12; daneben 61; $2a = 6$ unter die 6; 6 in 36 darf nur 5mal genommen werden; 5 $(= b)$ in die Quotientenstelle oben, und 5 neben $2a$ in die vierte Reihe; $\times b$, das Product darunter in die fünfte. Nun subtrahirt man die fünfte Reihe von der dritten, indem man die Zahlen der dritten Reihe sogleich in den Rest verwandelt (s. o. Division). Sehr zweckmäßig führt man die Multiplication mit b sogleich in der vierten Reihe aus, indem man die Zahlen (65×5) sogleich in das Product (325) verwandelt; dann stehen Subtractor und Minuendum unter einander, und das Minuendum wird nun in den Rest verwandelt; der Subtractor wird fortgenommen, und die zwei Ziffern der dritten Columne (74) neben den Rest (36) angesteckt, u. s. w. Nach beendetem Calcul mit der letzten Columne (41) steht auf unserer Tafel:

$\sqrt[2]{}$: 1 2 6 1 7 4 1 4 4 1 . . . 3 5 5 2 1.
7 1 0 4.
7 1 0 4.

Der Geübte bedarf bei der Bearbeitung der Zahlen in der 3ten und 4ten oder auch 5ten Reihe des Endzeichens (.) nur, wenn die letzte Zahl eine Null ist.

Geht die Zahl nicht völlig auf, bleibt ein Rest, dann wird die Wurzel in Decimalstellen ausgezogen; zu dem Ende wird . hinter die gefundene Wurzel gesetzt, und dem Reste werden zwei Nullen angehängt, dann fortgefahren &c. Z. B.

$\sqrt[2]{}$: 7 9 6 5 8 . . . 2 8 2. 2 3 6 u. s. w.
1 3 4 0 0.
5 6 4 2.
1 1 2 8 4.
2 1 1 6 0 0.
5 6 4 4 3.
1 6 9 3 2 9.
4 2 2 7 1 0 0.
5 6 4 4 6 6.
3 3 8 6 7 9 6.
8 4 0 3 0 4 0 0. u. s. w.

Soll aus dem Decimalbruche 13,70 $\sqrt{}$ gezogen werden, dann werden die Ganzen durch . getrennt, und, nach Umständen Doppel-Nullen angehängt, u. s. w.

1 3. 7 0 0 0 0 0 . . . . 3. 7 0 1 . . . .
2 5 9 9.

Oder aus 0,0021 soll $\sqrt{}$ gezogen werden:

0. 0 0 2 1 0 0 0 0 : 0. 0 4 5 8 . . . . . u.
5 0 0.
8 5
4 2 5
7 5 0 0.
9 0 8
7 2 6 4
2 3 6

Bei gewöhnlichen Brüchen wird die Wurzel unmittelbar aus jedem Bruche gezogen, wenn Zähler und Nenner vollkommene Quadrate sind; z. B.:

$\sqrt{1/4} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = 1/2$; $\sqrt{9/16} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = 3/4$; $\sqrt{25/64} = 5/8$; $\sqrt{256/1296} = 16/36$.

256 . 1296

16 . 36

Ist Zähler oder Nenner kein Quadrat, dann verwandelt man den Bruch in einen Decimalbruch, und zieht aus diesem $\sqrt{\ }$. Oder man multiplicirt den Zähler mit dem Nenner, zieht aus diesem Producte die Wurzel, und dividirt diese durch den Nenner.

Z. B. $\sqrt{4/7} = 0{,}571428\ldots$, daraus $\sqrt{\ } = 0{,}755\ldots$

oder $\sqrt{4/7} = \frac{4 \times 7}{7} = \frac{\sqrt{28}}{7} = \sqrt{28{,}0000} \mid 5{,}289\ldots : 7 = 0{,}755\ldots$

Z. B. $\sqrt{17/64} = 0{,}26562500$; daraus $\sqrt{\ } = 0{,}5153$.

oder $\sqrt{17/64} = \frac{\sqrt{1088}}{64} = \sqrt{1088000000} \mid 3{,}29848 : 64 = 0{,}5153$.

Z. B. $\sqrt{3/16} = 0{,}187500$; daraus $\sqrt{\ }\ 0{,}433$.

oder $\sqrt{3/16} = \frac{\sqrt{48}}{16} = \sqrt{48000000} \mid 6{,}9282 : 16 = 0{,}433$.

2) Ausziehung der $\sqrt[3]{\ }$, der Cubikwurzel.

Der Cubus einer zweitheiligen Wurzel enthält 4 Producte: 1) den Cubus des ersten Theiles $= a^3$; 2) das dreifache Product aus dem Quadrate des ersten in den zweiten Theil $= 3a^2 \times b$; 3) das dreifache Product des ersten in das Quadrat des zweiten, $= 3a \times b^2$, und 4) den Cubus des zweiten Theiles $= b^3$.

Die Formel hiezu ist also: $\sqrt[3]{\ } = a^3\ (3a^2:) + 3a^2 \times b + 3a \times b^2 + b^3$.

Z. B.:

	$\sqrt[3]{\ }$ 19	683	= 27.
a^3	8		
	11	683	
$(3a^2)$	(1	2)	
$+3a^2\times b$	8	4	
$+3a\times b^2$	2	94	
$+b^3$		343	
	11	683	

$$3a^2\times b+3a\times b^2+b^3=0$$

Der Aufsatz auf unserer Tafel geschieht links oben in der obersten Reihe. Zuerst $\sqrt{\ }^3$, dann die Zahl, dann = Zeichen. Die Zahl theilt man von rechts (von den Einern an) in dreizifferige Classen; zwischen je drei Zahlen läßt man einen Primknopf frei, dem man dann sogleich in 6 eine große glatte Nadel hinzufügt. Die erste Columne kann 3, 2 oder 1 Ziffer enthalten. Man fügt nun in 6 horizontalen Reihen jedem unter dem trennenden (• 6) Zeichen sich befindenden Primknopfe eine große glatte Nadel in 6 hinzu, wodurch trennende Vertikallinien, Columnen, entstehen, welche jeder Irrung vorbeugen. Nun a^3, der Cubus der ersten Col. wird als erste Zahl (a) der $\sqrt{\ }^3$ hinter = Zeichen gesetzt; von der 1sten Col. wird die Cubuszahl subtrahirt; der Rest darunter gesetzt (2te Reihe), da neben die 3 Ziffern der 2ten Col.; $3a^2$ ($3\times a\times a$) wird so darunter (3te Reihe) gesetzt, daß die Einer dieses $3a^2$ unter die 100ter der 2ten Columne zu stehen kommen. Man dividirt mit $3a^2$ knapp in das Partialproduct der ersten + der ersten Ziffer desselben der zweiten Columne, und setzt den gefundenen Quotienten als zweite Zahl (b) der $\sqrt{\ }^3$ hinter a. Nun $3a^2\times b$ ($3\times a\times a\times b$) wird in die 4te Reihe gesetzt, wie $3a^2$, so daß Einer unter den 100ten der 2ten Columne stehen. Nun $3a\times b^2$ ($b\times b\times 3a$) so darunter in die 5te Reihe, daß die Einer unter die Zehner der drei Zahlen der 2ten Columne zu stehen kommen. Endlich b^3 ($b\times b\times b$) in die 6te Reihe, Einer unter Einer der 3ten Columne 2c. Nun zieht man $3a^2$ in der 3ten Reihe ganz fort, addirt die 4te, 5te und 6te Reihe aufwärts, setzt das Facit in die 3te Reihe, subtrahirt die 3te Reihe von der zweiten, indem man aus dem

Minuendum der zweiten Reihe sogleich den Rest macht; zieht 3te, 4te, 5te und 6te Reihe ganz fort, und setzt nun neben den Rest in der zweiten Reihe die drei Zahlen aus der dritten Columne herab. Nun wiederum $(3a, 3b)^2$; dividirt; Quotient $= c$ als dritte $\sqrt{}$ Zahl in die erste Reihe; $(3a, 3b)^2 \times c$ in die 3te Reihe; darunter $(3a, 3b) \times c^2$; darunter c^3; nun $(3a, 3b)^2$ weggezogen; in dieser Reihe die Summe der 4ten, 5ten und 6ten Reihe angesteckt; subtrahirt; Rest in der 2ten Reihe; alle übrigen Zahlen fortgezogen, die drei folgenden Zahlen der vierten Columne herab in die zweite Reihe; $(3a, 3b, 3c)^2$; dividirt; Quotient $= d$; $(3a, 3b, 3c)^2 \times d$; $(3a, 3b, 3c) \times d^2$; d^3 2c.

Auf diese Weise können wir auf unserer kleinen Tafel (von 20 Stellen horizontal und 14 Stellen vertikal) die $\sqrt{}^3$ aus einer 15stelligen Zahl ziehen. Die größeren Multiplicationen können rechts unten ausgeführt, und die Zahlen nach dem Gebrauche wieder weggenommen werden. — Bei der Zahl $\sqrt{}^3$ **2460375** steht auf unserer Tafel, nachdem a und b gefunden sind,

$\sqrt{}$ 3 : 2 : 460 : 375 ... 13
: 263 :
: :

und wenn die ganze $\sqrt{}^3 = 135$ gefunden ist, steht, da Minuendum und Subtractor gleich sind,

$\sqrt{}$ 3 : 2 : 460 : 375 ... 135 .
: 263 : 375 :
: 263 : 375 :
: 253 : 5 . . :
: . . 9 : 75 . :
: : 125 :

Dem Reste einer nicht völlig cubischen Wurzel giebt man eine neue Columne von 3 Nullen, und setzt das Ausziehen der $\sqrt{}^3$, in einem Decimalbruche, nach Umständen fort. Hiezu ist, um Irrthum zu vermeiden, erforderlich, daß man den Rest, welcher nach Ausziehung der Wurzel aus der letzten Columne bleibt, eine Knopfreihe tiefer herabsetzt, (so daß zwischen der gefundenen Wurzel und dem zu berechnenden Reste eine freie Linienreihe, = horizontalem Trennungsstrich, bleibt,) und dann dem Reste drei Nullen, und hinter diese einen vertikalen Trennungsstrich anhängt, um nicht durch die darüberstehenden Wurzelzahlen bei der nun unter diesen und weiter nach rechts fortgesetzten Arbeit zu Irrthum verleitet zu werden. Außerdem bedarf man großer, im Kopfe schwierig auszuführender Multiplicationen, welche man rechts am Rande der Tafel (oder auf einer anderen Tafel) verrichtet.

z. B. $\sqrt[3]{7|593|058|275} = 1965{,}48$

7	593	058	275	1965,48	
6	593				
	734	058			
63	522	275			
5	751	150	000		
1	116	736	736	000	
	189	627	681	408	...

am Rande z. B.

$$\begin{array}{r} 19654 \\ \times 3 \\ \hline 58962 \\ \times 19654 \\ \hline 235848 \\ 294810 \\ 353772 \\ 530658 \\ 58962 \\ \hline 1158839148 \\ \times 8 \\ \hline 9270713184 \end{array}$$

Auf unserer Tafel steht, nachdem die 2te Decimalstelle gefunden ist

7	593	058	275	1965	48
	..1	116	736	736	000
		927	109	054	592
		927	071	318	4
			37	735	68
					512

Die Subtraction wird in der Reihe des Minuendums durch unmittelbare Umänderung der Minuendziffern in den Rest vorgenommen; alle übrigen verbrauchten Zahlen fortgeräumt, und somit steht zuletzt:

$\sqrt[3]{}$ 7	593	058	275	1965	48
		189	627	681	408

welchem Reste nun wiederum drei Nullen angehängt werden können u. s. f.

Bei gewöhnlichen Brüchen wird $\sqrt[3]{}$ unmittelbar aus jedem Bruche gezogen, wenn Zähler und Nenner vollkommene Cuben sind; z. B.

$$\sqrt[3]{8/27} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = 2/3;\quad \sqrt[3]{1296/6561} = 36/81;\quad \sqrt[3]{125/512} = 5/8.$$

Ist der Nenner kein reiner Cubus, dann verwandelt man den Bruch in einen Decimalbruch, und zieht aus diesem $\sqrt[3]{\ }$; oder man multiplicirt den Zähler und Nenner des Bruches durch das Quadrat des Nenners desselben, wodurch dieser cubisch wird; zieht dann aus beiden die $\sqrt[3]{\ }$, und dividirt die $\sqrt[3]{\ }$ des Zählers durch die des Nenners.

Z. B. $\sqrt[3]{3/4} = \sqrt[3]{0{,}750.000.000.} \;\|\; 0{,}908\ldots$
Rest $= 1\ 386\ 688$

oder $\sqrt[3]{3/4} = 48/64 = \frac{\sqrt[3]{48}}{4}$ $48.000.000.000 \;\|\; 3{,}634\ldots : 4 =$
Rest $9\ 555\ 896$ $0{,}908\ldots$

Z. B. $\sqrt[3]{3\,3/4} = \frac{\sqrt[3]{15}}{4} = \sqrt[3]{3{,}75\ldots\ldots} = 1{,}55\ldots$

oder $\frac{\sqrt[3]{240}}{4} = \frac{6{,}21}{4} = 1{,}55\ldots$

3) Um $\sqrt[4]{\ }$ zu finden, zieht man aus der gegebenen Zahl zweimal $\sqrt[2]{\ }$; um $\sqrt[6]{\ }$ zu finden, zieht man aus der gegebenen Zahl einmal $\sqrt[3]{\ }$, und dann einmal $\sqrt[2]{\ }$ u. s. w. Soll die Ausziehung höherer Wurzeln auf einmal ausgeführt werden, dann bedient man sich der vollständigen Formeln. Z. B. $\sqrt[4]{\ } = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$; $\sqrt[5]{\ } = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$; $\sqrt[6]{\ } = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$; $\sqrt[7]{\ } = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$; $\sqrt[10]{\ } = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}$ u. s. w.

Den kürzeren Weg, mittelst Logarithmen die Wurzeln auszuziehen, s. »Logarithmen.«

Die 10 ersten Potenzen der Zahlen 1 bis 10.

Pz. n	n^2	n^3	n^4	n^5	n^6	n^7	n^8	n^9	n^{10}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19,683	59,049
4	16	64	256	1024	4096	16,384	65,536	262,144	1,048576
5	25	125	625	3125	15,625	78,125	390,625	1,953125	9,765625
6	36	216	1296	7776	46,656	279,936	1,679616	10,077696	60,466176
7	49	343	2401	16,807	117,649	823,543	5,764801	40,353607	282,475249
8	64	512	4096	32,768	262,144	2,097152	16,777216	134,217728	1073,741824
9	81	729	6561	59,049	531,441	4,782969	43,046721	387,420489	3486,784401
10	100	1000	10,000	100,000	1,000000	10,000000	100,000000	1000,000000	10,000,000000

VII. Logarithmen.

Der Logarithmus x einer Zahl y ist der Exponent, welcher angiebt, zu welcher Potenz man eine bestimmte Zahl a (die Basis) erheben müsse, um die gegebene Zahl y zu erhalten. Wenn also $y = a^x$ ist, so ist $x =$ Log. y. — Die Basis a der gemeinen Logarithmen ist 10. Der Logarithmus von 10 ist $= 1$, d. i. $10 = 10^1$; von $100 = 2$, d. i. $100 = 10^2$; von $1000 = 3$, d. i. $1000 = 10^3$ u. s. f. Der Logar. ist also die Verhältnißzahl (λόγος das Verhältniß, und ἀριθμὸς die Zahl), weil die Glieder der arithmetischen Reihe die Verhältnißzahlen der geometrischen Reihe sind: $1 = 0$, $10 = 1$, $100 = 2$, $1000 = 3$, $10000 = 4$ u. s. f. — Der Logar. der Zahl, welche nicht vollkommene Potenz von 10 ist, kann nur in einer genäherten, gebrochenen Potenz von 10 angegeben werden. So z. B. ist Log. $2 = 0{,}30103$, oder $2 = 10^{0{,}30103}$, oder $10^{\frac{30103}{100000}}$, oder $\sqrt[100000]{10^{30103}}$. Die dem Logarithmus zugehörende Zahl ist also eine absolute Größe.

Der ganze Theil eines jeden Logar. heißt die Kennziffer (Charakteristik); der gebrochene Theil heißt die Zugabe (Mantisse). Die Kennziffer ist immer um eine Ziffer kleiner, als die Anzahl der Ziffern der Zahl, deren Logar. gesucht wird.

Das Aufsuchen der Log. für eine gegebene Zahl s. Vega's Logar. trigonom. Handbuch, Einleitung §. 10 u. 11; für gegebene Brüche ib. §. 11. Nr. 11 u. 12; das Aufsuchen der zu einem Log. gehörenden Zahl ib. §. 12.

Die Logar. gewähren dem Rechner manche Erleichterung und Zeitersparung, besonders bei verwickelten größeren Multiplicationen mit darauf folgenden größeren Divisionen, bei Potenzerhebungen, Progressionen, Zins-auf-Zinsrechnung, Wurzelausziehungen, besonders höherer Wurzeln, wie auch bei hohen Potenzirungen, aus welchen höhe Wurzeln gezogen werden sollen u. s. w. In Vega's Handbuche sind die Log. von 1 bis 101000 auf 7 Stellen der Mantisse berechnet, und lassen sich hiemit die Berechnungen bis auf $1/_{200000}$ Procent genau ausführen; eine Genauigkeit, die nur in einigen Fällen der höheren Mathematik und bei manchen großen Posten in der niederen Arithmetik nicht völlig ausreicht. In Vega's Thesaurus logarithmorum completus etc. sind die Log. von 1 bis 101000 auf 10 Decimalstellen berechnet. — Zu einer gegebenen 5 bis 8stelligen Zahl ist der Log. in den ersteren Tafeln noch sehr genau zu finden; zu Wurzelausziehung ist eine 11 bis 12zifferige Zahl ebenfalls hinreichend genau aufzufinden. — Für einen gegebenen Logar. läßt sich die Zahl bis zu 6 Ziffern immer genau, mit ziemlicher Sicherheit noch bis zur 7ten und 8ten Stelle finden.

I, Die Addition der Logarithmen ist gleich der Multiplication der den Log. zugehörenden Zahlen. $a^m \times a^n = a^{m+n}$. Die entsprechende Zahl ist bei 4zifferigem Multiplicandum und 3zifferigem Multiplicator genau zu finden; ist das Product 7zifferig, dann ersieht man die letzte Ziffer aus der Multiplication der beiden letzten Ziffern der gegebenen Zahlen; bei der Kennziffer 7 ist die 8te Ziffer schwankend.

$$\begin{array}{lrl}
\text{Z. B. Lg. } 9999 & = & 3{,}9999566 \\
+\ \text{Lg. } 9 & = & 0{,}9542425 \\
\hline
 & & 4{,}9541991 = 89991.
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{Z. B. Lg. } 9580 & = & 3{,}9813655 \\
+\ \text{Lg. } 327 & = & 2{,}5145478 \\
\hline
 & & 6{,}4959143 = 3132660, \text{ die letzte Ziffer} \\
 & & \quad 049 \quad = 0, \text{ da } 7 \times 0 = 0 \text{ ist.} \\
\hline
 & & \quad 94 = 6
\end{array}$$

Wäre 9587×327 gefordert, dann findet man

$$\begin{array}{l}
a^{m+n} = 6{,}4962305 = 3134949 \\
\qquad\quad -\ 237 \\
\hline
\qquad\qquad 68 = 4 \\
\qquad\quad -\ 55 \\
\hline
\qquad\qquad 13 + 0 = 130 = 9,
\end{array}$$

oder $7 \times 7 = 49$, mithin muß die letzte Ziffer eine 9 sein.

Ebenso bei $3794 \times 1587 =$ Lg. 6,7796742, woraus die 7zifferige Zahl 6021078 sich ergiebt; die vorletzte 7 aus $742 - 686 = 56$; $56 - 51 = 5$, mit angehängter $0 = 50$ würde höchstens 7 nach den Log. Tafeln geben; die $\times$ der beiden letzten Ziffern $4 \times 7 = 28$ giebt die 7te Ziffer $= 8$ sicher.

II. Die Subtraction der Log. ist gleich der Division der den Log. zugehörenden Zahlen. $a^m : a^n = a^{m-n}$. Je kleiner der Divisor bei 6 bis 8zifferigem Dividendum, desto unsicherer werden die beiden letzten Stellen des Quotienten; und umgekehrt; aber selbst bei 8 — 12 ziff. Dividend und 5 — 6 ziff. Divisor findet man den Quotient genau. Z. B.

$597 : 27935847 = 46793,_{713}\ldots$
$$\begin{array}{rl} & \text{Lg. } 7{,}4461618 \\ - & \text{Lg. } 2{,}7759743 \\ \hline & 4{,}6701875 = \text{Lg. N. } 46793,_{71}\ldots \end{array}$$

$779887 : 950287543732 = 121849,_{375}\ldots$
Lg. 11,9778551 — Lg. 5,8920317 = 6,0858234
= Lg. N. 121849, . . .

I und II verbunden; z. B.: $(3758 \times 12547) : 5782$.

$$\begin{array}{rl} & \text{Lg. } 3758 = 3{,}5749568 \\ + & \text{Lg. } 12547 = 4{,}0985399 \\ \hline & 7{,}6734967 \\ - & \text{Lg. } 5782 = 3{,}7620781 \\ \hline & 3{,}9114186 = \text{Lg. N. } 8154,_{9}. \end{array}$$

Z. B. $\left(\frac{47 \times 0{,}653 \times 12\,^5/_6}{3576 \times 1520}\right)$

$$\begin{array}{rl} & \text{Lg. } 3576 = 3{,}5533975 \\ + & \text{Lg. } 1520 = 3{,}1818436 \\ \hline & 6{,}7352411 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \text{Lg. } 47 = 1{,}6720979 \\ & \text{Lg. } 0{,}653 = 0{,}8149132 - 1 \\ & \text{Lg. } 12{,}833 = 4{,}1083395 - 3 \\ \hline & 6{,}5953506 - 4 \\ - \text{Lg.} \begin{pmatrix} 3576+ \\ 1520 \end{pmatrix} & = 6{,}7352411 \\ \hline & 0{,}8601095 - 5 = 0{,}000072461\ldots \end{array}$$

Die Berechnung auf gewöhnlichem Wege $47 \times 0{,}653 \times 12{,}833 = 393{,}857603$ als Dividendum, und $3576 \times 1520 = 5435520$ als Divisor, giebt den Quotienten = 0,0000724599.

III. Die Multiplication des Logar. ist gleich der Potenzerhebung der dem Log. zugehörenden Zahl. $(a^m)^n = a^{mn}$. Diese Producte werden, wenn sie 6 bis 7 Ziffern nicht übersteigen, genau gefunden.

A) a^2. Z. B. 398^2 = Lg. 2,5998831 × 2
5,1997662 = 158404.

Z. B. 7357^2 = Lg. 3,8667008 × 2
7,7334016 = 54125449
3979

$7^2 = 49$. 37 = 4

Z. B. 12345^2 = Lg. 4,0914911 × 2
8,1829822 = 152399025.
565
257 = 9 $5^2 = 25$.

Die Zahl muß 9zifferig sein; 7 Zahlen werden unmittelbar gefunden; die beiden letzten Zahlen aus der Potenztafel: $5^2 = 25$.

B) a^3. Z. B. 186^3 = Lg. 2,2695129 × 3
6,8085387 = 6434856.
$6^3 = 216$. 351
36 = 5

Z. B. 218^3 = Lg. 2,3384565 × 3
7,0153695 = 10360232.
598
97 $8^3 = 512$
84 = 2
130 = 3

C) a^4. Z. B. 49^4 = Lg. 1,6901961 × 4
6,7607844 = 5764801.
$9^4 = 6561$. 2 = 0

$60^4 = 12960000$ ist leicht in der Potenztafel zu finden; 6^4 und 4 Nullen angehängt; ebenso $600^4 = 6^4$ und 8 Nullen angehängt.

Z. B. 63^4 = Lg. 1,7993405 × 4
7,1973620 = 15752961.
357
263 = 9 $3^4 = 81$.
248
150 = 6.

D) a^5. Z. B. 25^5 = Lg. 1,3979400 × 5
6,9897000 = 9765625.
989
11 = 2 oder $5^5 = 3125$.

Z. B. 39^5 = Lg. 1,5910646 × 5
7,9553230 = 90224199.
21
9
5 = 1 $9^5 = 59049$.
40 = 9

E) a^6. Z. B. 21^6 = Lg. 1,3222193 × 6
7,933358 = 85766121
2
6 = 1 $1^6 = 1$.
10 = 2

F) a^7. z. B. 12^7 = Lg. 1,0791812 × 7
7,5542684 = 35831808.
589
$2^7 = 128$. 95 = 8
— 2 = 0

G) a^{15}. z. B. 3^{15} = Lg. 0,4771213 × 15
7,1568195 = 14348927.
7914
3 potenzirt, hat die periodische Endziffer: 281 = 9.
3, 9, 7, 1 2c., also 3^{15} = ...7. 74
70 = 2

H) a^{23}. z. B. 2^{23} = Lg. 0,3010300 × 23
6,9236900 = 8388618.
2 potenzirt, hat die periodische Endziffer: 895
2, 4, 8, 6 2c., also 2^{23} = ...8. 5 = 1

IV. Die Division des Log. ist gleich der Wurzelausziehung aus der dem Log. zugehörenden Zahl. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

z. B. $\sqrt[2]{27935847}$ = Lg. 7,4461618 : 2 = 3,7230809 = $5285,_{436} = \sqrt[2]{}$.

z. B. $\sqrt[2]{17179869184}$ = Lg. 10,2350198 : 2 = 5,1175099 = 131072 = $\sqrt[2]{}$; daraus nochmals $\sqrt[2]{}$ gezogen, giebt das Biquadrat der ersteren Zahl: $\sqrt[2]{131072}$ = Lg. 5,1175099 : 2 = 2,5587549 = $362,_{038} = \sqrt[4]{}$; dasselbe Resultat giebt der obige Lg. 10,2350198 : 4.

z. B. $\sqrt[3]{27935847}$ = Lg. 7,4461618 : 3 = 2,4820539 = $303,_{426} = \sqrt[3]{}$; ebenso $\sqrt[4]{} = 72,_{701}$; $\sqrt[5]{} = 30,_{848}$; $\sqrt[6]{} = 17,_{420}$; $\sqrt[7]{} = 11,_{657}$; $\sqrt[8]{} = 8,_{526}$; $\sqrt[9]{} = 6,_{719}$; $\sqrt[10]{} = 5,_{554}$; $\sqrt[15]{} = 3,_{136}$; $\sqrt[25]{} = 1,_{982}$ u. s. w.

Unser obiges Beispiel, S. 83, $\sqrt[3]{7593058275}$ finden wir hiernach = Lg. 9,8804167 : 3 = 3,2934722 = $1965,_{49} = \sqrt[3]{}$.

Große Bequemlichkeit gewähren die Log. bei Potenzirung und Wurzelausziehung von Brüchen, z. B. $(2\,{}^5/_6)^9$ = Lg. $({}^{17}/_6)^9$ = 0,4522976 × 9 = 4,0706784 = Num. $11767,_{34}$.

z. B. $\sqrt[5]{365\,{}^4/_5} = \sqrt[5]{{}^{1829}/_5}$ oder $\sqrt[5]{365,8}$ =
1829 = Lg. 3,2622137 oder 365, 8 = 2,5632437.
— 5 = — Lg. 0,6989700

5 : 2,5632437 = 0,5126487 = Num. $3,_{2557}$ ...

Auch bei den Proportionalrechnungen lassen sich die Log. mit Vortheil anwenden, z. B. 157 Centner 8 Loth kosten 267 ℛ 16 gr, wie viel kosten 271 ℔ 16 Loth.

157 Ct. (à 100 ℔) 8 Lth. = 15700,25 ℔
267 ℛ 16 gr ——— = 267,666 ℛ = Lg. 5,4275932—2
271 ℔ 16 Lth. ——— = 271,5 ℔ = + Lg. 3,4337698—1

8,8613630—4
15700,25 = — Lg. 6,1959065—2

0,6654565 = 4,6286 ℛ

6286 : 10000 giebt im Kettenbruche die Quotienten 1,1,1,2 rc., welche gelöset den gemeinen Bruch $^5/_8$ ℛ = 15 gr geben, als genäherten Werth für $^{6286}/_{10000}$. Genauer

3 × 6286 = 18858 — also 15 gr $1\,^{23}/_{625}$ ₰.
8 : 10000 = 1250 : 18858 = 15 gr
6 × 108 = 648
2 : 1250 = 625 : 648 = 1 ₰
$^{23}/_{625}$.

Die Lösung dieser Prop. Aufgabe auf gewöhnlichem Wege:

$15700\,^1/_4$ ℔ : $267\,^2/_3$ ℛ = $271\,^2/_4$: x
×4+1 ×3+2 ×4+2

62801 803 × 1086 = 872058.
×3
188403 : 872058 | 4 ℛ
8 × 118446 = 947568
3 : 188403 = 62801 : 947568 | 15 gr
12 × 5553 = 66636 : 62801 | 1 ₰.
3835

also 4 ℛ 15 gr $1\,^{3835}/_{62801}$ ₰.

Mit großem Vortheil wendet man die Log. bei der Zins-auf-Zins-Rechnung an. Bekanntlich werden die Zinsen, welche ein Capital in einem Jahre bringt, durch die Formel $z = \frac{cp}{100}$ gefunden, wo c das Capital, p der Zinsfuß und z die Zinsen sind. Z. B. 57575 ℛ zu 4 %

× 4
100 : 2303,00 ℛ

Will man wissen, wie groß das Urcapital C ist, wenn die jährlichen 4 % Zinsen addirt, in 5 Jahren 11515 ℛ gaben (sind also z, p, n gegeben); dann findet man C durch einen Proportionalsatz $p : 100 = \frac{z}{n} : x$. $\frac{z}{n} = \frac{11515}{5} = 2303$; also $4 : 100 = 2303 : x$; $2303 \times 100 = \frac{230300}{4} = 57575$ ℛ.

Ist C, z und n gegeben, und man will den Zinsfuß p wissen, dann findet man diesen durch den combinirten Proportionalsatz C : 100 = z : x   57575 : 100 = 11515 : x
n : 1 = x : y   5 : 1 = x : y
Hier läßt sich 11515 durch 5 heben = 2303; also $\frac{230300}{57575} = 4$.

Nach der Formel $z = \frac{c\,p}{100}$ fanden wir oben die Zinsen eines Jahres. Durch fortgesetzte Multiplication und Addition läßt sich auf einem weitläufigen Wege das Zins-Zins-Capital nach einer bestimmten Zahl von Jahren finden. In obigem Beispiele ist das Capital am Ende des ersten Jahres um 2303 ℛ𝓉 vergrößert, also 59878 ℛ𝓉 × 4 = $2395,_{12}$ ℛ𝓉; also nach Ablauf des zweiten Jahres ist E, das Zins-Zins-Capital, = $62273,_{12}$ ℛ𝓉 u. s. w. Dieses E findet man mit Logarithmen auf einfache Art nach der Formel $E = C \times p^n$, wo n die Anzahl der Jahre bezeichnet.

Z. B. 57575 ℛ𝓉 zu 4 % in 7 Jahren Zins-Zins?

$$\begin{array}{rl} 1{,}04 = \text{Lg.} & 0{,}0170333 \\ & \times 7 \\ \hline & 0{,}1192331 \\ 57575 = +\text{Lg.} & 4{,}7602339 \\ \hline & 4{,}8794670 = 75764,_7;\ {}^7\!/_{10}\ \text{ℛ𝓉} = 16\ \text{gr}\ 9^3\!/_5\ \text{ℐ}. \\ & 29 \\ \hline & 41 = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{oder } 26 = & 1{,}4149733 \\ -\ 25 = & 1{,}3979400 \\ \hline & 0{,}0170333 \end{array}$$

Will man den discontirten Werth eines Capitales wissen, welches bei einem bestimmten Zinsfuße nach einer bestimmten Anzahl von Jahren das E Capital gebracht hat, dann löset man dieses durch die Formel $C = \frac{E}{p^n}$. Z. B. $75764,_7$ entstand bei 4 % in 7 Jahren Zins auf Zins, wie groß war C vor 7 Jahren?

$$\begin{array}{rl} 75764{,}7 = \text{Lg.} & 5{,}8794670 - 1 \\ -\ p^n = -\ \text{Lg.} & 0{,}1192331 \\ \hline & 4{,}7602339 = 57575\ \text{ℛ𝓉}. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 1{,}04 = \text{Lg.} & 0{,}0170333 \\ & \times 7 \\ \hline & 0{,}1192331. \end{array}$$

Will man den Zinsfuß wissen, bei welchem ein Capital C nach n Jahren zu der Größe E anwuchs, dann löset man durch

$p = \sqrt[n]{\left(\frac{E}{C}\right)}$. Z. B. 75764,7 ₰ waren vor 7 Jahren 57575 ₰, bei Zins auf Zinserhöhung; welches war der Zinsfuß?

$E = 75764{,}7 = \text{Lg.}\ 5{,}8794670 - 1$

$C = 57575 = -\text{Lg.}\ 4{,}7602339$

$\sqrt[n]{} = 7 : 0{,}1192331 \mid 0{,}0170333 = 1{,}04$ Procent.

Will man endlich die Anzahl der Jahre finden, während welcher ein Capital C bei dem Zinsfuße p mit Zins-Zinsen = E würde, dann löset man durch $n = \frac{\text{Lg. } E - \text{Lg. } C}{\text{Lg. } p}$. Obiges Beispiel also: $E = \text{Lg.}\ 5{,}8794670 - 1$

$C = -\text{Lg.}\ 4{,}7602339$

$p = 0{,}0170333 : 0{,}1192331 \mid 7$ Jahre.

$\times 7$

$0{,}1192331.$

Die Anwendung der Logarithmen, welche für den Blinden unausführbar scheint, geschieht auf unserer Tafel mit großem Vortheile. Vega's 7stellige Logarithmen würden, mit compresser Preßschrift dem Blinden lesbar gemacht, zwei voluminöse Foliobände fordern; mithin wäre dieses ausführbar. Es bedarf aber nicht dieses kostspilligen Hülfsmittels; denn jedes mehr oder weniger in Zahlen und Rechnen geübte Kind findet und lieset die geforderten Zahlen aus den logarithmischen Tafeln. Natürlich muß der blinde Rechner eine klare Einsicht der Entstehung und Behandlung der Logarithmen, wie der Einrichtung und des Gebrauches der Logar. Tafeln haben, was dem gründlich bis so weit geführten Rechner nicht schwer fallen wird, zumal wenn er, als Gedächtnißhülfe, die Copie eines Theiles der ersten, und eines Theiles irgend einer andern Tafel der Vega'schen Log. Tafeln (also zwei Blätter), mit für ihn lesbarer Schrift bereitet besitzt.

Die Bezeichnung »Logarithmen« Lg. geschieht auf unserer Tafel durch ein L, welches man mit dem Gleichheitszeichen verbindet; z. B. 357 = Lg. 2,552...; setzen wir 357 L 2 , 552...

Die verschiedenen Operationen mit Logar. werden links oben auf der Tafel vorgenommen. Die Kennziffer wird durch Komma (•5) [s. o. S. 19] von der Mantisse getrennt; hinter die 7te Ziffer dieser kommt das Endzeichen (•5); ist die Kennziffer zu verringern, dann wird anstatt •5 sogleich das Minuszeichen (•4 mit Spitznadel), und dahinter der Subtractor gesetzt. Z. B. der Log. für den Decimalbruch Lg. 0,042905 = 0,6325079 • ꜜ2, hinter welcher kein Endzeichen nöthig ist; bei selten vorkommendem zwei- und mehrzifferigem Subtractor wird •5 hinter die letzte Ziffer desselben gesetzt.

Zu einer 5zifferigen Zahl nimmt man den Log. unmittelbar aus den eilf Verticalspalten der Veg. Tafeln. — Zu einer 6- und mehrzifferigen Zahl wird zunächst der Log. für 5 Ziffern aufgesteckt; der für die 6ste gefundene Proportionaltheil wird richtig unter die letzten Log. Ziffern gesetzt; ebenso der pp. für die 7te und 8te Ziffer (s. Vega's Handb. Einl. §. 11.); dann werden diese pp. Zahlen aufwärts dem ersten Log. zuaddirt, indem die Ziffern der 7ten, 6ten, auch wohl 5ten Stelle sogleich in die Productzahl verwandelt wird; die nun gebrauchten pp. Zahlen werden dann alle fortgenommen. — Ebenso wird bei Aufsuchung einer 6stelligen Zahl für einen Log. verfahren; jedoch kann man hier den richtig untergesetzten Subtractor stehen lassen, ihn von der Differenz durch eine Linienreihe trennen, und fortfahren.

Z. B. 23289427 : 93.
= Lg. 7 •̣ 3671508
4 = 75
2 = 37
7 = 13

Die achte Stelle wird addirt, und im Falle mehr als 5 herauskommen, die 7te Stelle um 1 erhöhet; hier sind 10, also die 7te Stelle = 18; die Zahlen der 8ten Stelle werden, nach der Aufwärts-Addition, mit hinweggenommen, und nun steht der gefundene Log. in der ersten Reihe =
7 •̣ 3671588 •̣ darunter —
Lg. 93 = 1 •̣ 9684829 •̣ eine Knopfreihe bildet die Linie;
• • • • • • • • •
5 •̣ 3986759 = 250423 •̣ 9 ..
690
• • •
69 = 3
52
• • •
170 = 9

Auf kleinen, nur 20 bis 25stelligen Tafeln setzt man bei großen Zahlen die eine dieser in die obere Reihe, dahinter das Zeichen der Operation (+ — × :) und die Zahl, mit welcher operirt werden soll; in die zweite Reihe dann den Log. der einen Zahl, und vervollständiget ihn in dieser Reihe; darunter in der 3ten Reihe den andern Log., richtig gestellt; nun beginnt man die Operation in der 4ten oder 5ten Reihe darunter; hinter diese neue Zahl kommt das = Zeichen, und dahinter die dem Log. zugehörende, in den Log. Tafeln gefundene Zahl. — Zur Ausführung der Addition und Subtraction bedarf es keiner weiteren Erörterung. Bei Multiplication wird der mehrstellige Multiplicator unter oder hinter den Log. gesetzt, dann Linienreihe, Multiplication, Linienreihe und Addition, stets mit genauer Berücksichtigung der Kennziffer. Z. B.

1 , 04 ⁝ 0 , 0170333 , , 25 ,

851665

340666

0 , 4258325 ,

Bei der Division (Wurzelausziehung) wird zuerst das √ Zeichen, daneben die Zahl des √ Exponenten, dann vertikaler Trennungsstrich, nun die Zahl gesetzt; in der Reihe darunter = L, dann Kennziffer, Komma, Mantisse, Divisionszeichen; in der dritten Reihe wird die Division ausgeführt; dahinter =, und die diesem Log. zugehörende Zahl.

Z. B. √3 ⁝ 27935847 ,

⁝ 7 , 4461618 ⁝ vervollständiget aus: 487 |
8 = 124 |
2 , 4820539 ⁝ 303 , 426 . . 4 = 6 | 2
442 7 = 1 | 0
97 = 6 . . . 618 | ,

Soll √ aus einem Bruche gezogen werden, dann werden zu der Log. Kennziffer des Zählers so viel Einheiten zuaddirt, und hinten wieder abgezogen, daß man den Log. des Nenners wirklich abziehen kann.

z. B. $\sqrt[3]{5 : 144}$.
$+$ Lg. 5 = 0, 6989700.
$+$ 2, ... $-$ 2
$-$ Lg. 144 $-$ 2, 1583625.

0, 5406075 $-$ 2; oder man macht den Bruch zum Decimalbruche = 0,03472222 = Lg. 0,5406076 $-$ 2; damit die Division mit 3 ausgeführt werden könne, verwandelt man die Kennziffer und den Subtractor in 1 $-$ 3, dividirt nun in der Reihe darunter, und erhält den richtigen Logarithmus
1, 5406075 $-$ 3
0, 5135358 $-$ 1 = 0,32623...

Doch genug der Erörterungen. Wer sich die Mühe gab, die bisher angedeuteten Rechnungen auf unserer Tafel durchzuführen, wird jede geforderte Rechnung mit Logar. auf ihr ausführen können.

VIII. Progressionen.

Eine Progression ist eine Reihe von Zahlen, in welcher jede Stelle aus einer oder aus mehreren der unmittelbar vorausgehenden nach einem bestimmten Gesetze gebildet wird. Die einzelnen Ausdrücke der Reihen heißen Stellen oder Glieder. Das Bildungsgesetz ist einer unbeschränkten Mannigfaltigkeit fähig; deshalb sind unzählig viele Progressionsarten denkbar, wie die Analysis lehrt. — Die zwei gewöhnlichen Progressionsarten sind: die arithmetische und die geometrische Progression.

I. Eine arithmetische Progression ist eine Reihe von Zahlen, in welcher jede Stelle die unmittelbar vorangehende um eine bestimmte Größe übersteigt; z. B. 6, 12, 18, 24, 30 u. s. f., wo die Differenz der Glieder = 6 ist; so: 3, 8, 13, 18, 23 rc. Differenz = 5. Bezeichnet man das erste Glied durch a, die beständige Differenz durch d, die Anzahl der Glieder durch n, das letzte Glied durch t, und die Summe aller Glieder durch s, dann ist, da die folgende Stelle stets durch + d gebildet wird, die zweite Stelle a + d, die dritte a + 2 d, die vierte a + 3 d, mithin die nte Stelle = a + (n $-$ 1) d; somit entsteht die Gleichung t = a + (n $-$ 1) d.

z. B. $a = 7$, $d = 9$, $n = 100$; dann ist $t = 7 + (100 - 1) \times 9 = 898$. — Für die Summe aller Stellen hat man die Gleichung: $s = a + a + d + a + 2\,d + a + 3\,d \dots + a + (n-2) \times d + a + (n-1) \times d$. Man findet also die Summe aller Glieder, wenn man das erste Glied zu dem letzten addirt, die Summe mit der Anzahl der Stellen multiplicirt, und vom Producte die Hälfte subtrahirt; $s = \frac{n(a+t)}{2}$; z. B. $a = 5$, $d = 1/3$, $n = 1000$, dann ist $t = 5 + 999 \times 1/3 = 338$, und $s = \frac{1000\,(5 + 338)}{2} = 171500$.

Vermittelst dieser zwei Gleichungen $t = a + (n - 1)\,d$ und $s = [n(a+t)] : 2$ kann man je zwei der fünf Größen a, d, n, t, s finden, wenn die drei anderen gegeben sind. Hier finden sich, da man aus den 5 Elementen 10 Ternionen bilden kann, 10 verschiedene Aufgaben: 1) aus a, d, n findet man s und t; 2) a, d, t, = s, n; 3) a, d, s = t, n; 4) a, t, n = s, d; 5) a, t, s = d, n; 6) a, n, s = t, d; 7) d, t, n = a, s; 8) d, t, s = a, n; 9) d, n, s = a, t; 10) t, n, s = a, d.

Zur deutlichen Anwendung der zu diesen 10 Fällen gehörenden, aus obigen Gleichungen abgeleiteten und eliminirten Formeln, folgen diese hier, wie sie auf unserer Tafel gesetzt werden:

1) a, d, n. $s = [(n - 1 \times d) + 2a] \times (n : 2)$ • $t = (n - 1 \times d) + a$ •

2) a, d, t. $n = (t - a) : d\,[+ 1$ • $s = [(a+t) : 2] + [(t+a) \times (t - a)\,| : 2d]$

3) a, d, s. $n = \sqrt{\ }\,[2s : d\,| + (2a - d : 2d)^2] \pm (d - 2a : 2d)$. $t = \tfrac{1}{2}\,d \mp \sqrt{\ }\,(a - \tfrac{1}{2}\,d^2 + 2ds)$ •

4) a, t, n. $s = (a + t \times n) : 2$ • oder $[(t + d - a) \times (a+t)] : 2d$ • $d = (t - a) : (n - 1)$ •

5) a, t, s. $d = (t^2 - a^2) : (2s - a - t)$ • oder $[(t+a) \times (t - a) : (2s - t - a)$ • $n = 2s : (a + t)$ •

6) a, n, s. $t = (2s : n) - a$ • oder $(2s - an) : n$ • $d = (2s - 2an) : (n - 1 \times n)$ • oder: $(s - an \times 2) : (n^2 - n)$ •

7) d, t, n. $a = t - (n - 1 \times d)$ • $s = [\,|\,2t - (n - 1 \times d)\,| \times n] : 2$ • oder: $[\,|\,2t - nd + d\,| \times n] : 2$ •

8) d, t, s. $n = (2t + d \mid : 2d) \pm \sqrt{\;}\,[(2t + d \mid : 2d)^2 - (2s : d)]$ •. $a = (d : 2) \pm \sqrt{\;}\,[(t + \frac{1}{2}d)^2 - 2ds]$ •.

9) d, n, s. $t = (s : n) + [(n - 1 \times d) : 2]$ •. $a = (s : n) - [(n - 1 \times d) : 2]$ •.

10) t, n, s. $d = (2nt - 2s) : (n - 1 \times n)$ •. $a = (2s : n) - t$ •.

Die [ ] werden durch 2 Spitznadeln in 3 und 5, 9 und 7 bezeichnet; die ( ) durch zwei große glatte Nadeln ebendaselbst, und die | durch 2 glatte große Nadeln in 2 und 6. Die +, —, × und : durch eine Spitznadel in 8, 4, 6 und 2 (s. o. S. 16). — Diese Formeln nehmen, mit erhobener Schrift gedruckt, eine Folio-Seite ein, so daß sie dem blinden Rechner stets zu Gebote stehen.

Ein Beispiel mag zur völligen Verdeutlichung dienen:

Es wird ein artesischer Brunnen gebohrt; der erste Fuß (a) kostet 16 ℛ; jeder folgende Fuß kostet (d) 4 ℛ mehr; die Tiefe des Brunnens ist (n) 684 Fuß; wie viel kosten diese (s)? — Links oben in der 1sten, 2ten und dritten Reihe wird a = 16 g, d = 4 g, n = 684 f angesteckt; nun die erste Formel angewendet: $n - 1 \times d + 2a = 2764 \times \frac{1}{2} n = \times 342 = 945288 = s$. Soll das letzte Glied t gefunden werden, dann: $n - 1 \times d = 683 \times 4 = 2732 + 16 = 2748 = t$.

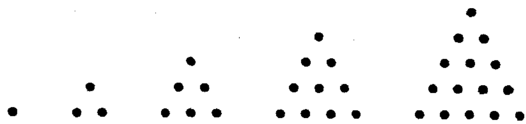
Soll aus a, d, s das t gefunden werden, dann Formel 3. $a - \frac{1}{2} d^2 = 14^2 = 196 + 2ds = 8 \times 945288 = 7562500$ $\sqrt{\;} = 2750 - \frac{1}{2} d = - 2 = 2748 = t$. Soll n gefunden werden: $[2s : d = 472644 + (2a - d : 2d)^2 = + 12\frac{1}{4}]$ $\sqrt{\;}\, 687\frac{1}{2} - (d - 2a : 2d) = (-28 : 8) = 3\frac{1}{2} - 687\frac{1}{2} = 684 = n$.

Soll aus d, t, s das a gefunden werden, dann Formel 8: $[(t + \frac{1}{2}d)^2 - 2ds]$ $2750^2 = 7562500 - 7562304 = 196$, daraus $\sqrt{\;} = 14{,}0 + (d : 2 =)\ 2 = 16 = a$.

Soll aus t, n, s das d gesucht werden, dann Formel 10: $(2nt - 2s) = (3759264 - 1890576) = 1868688 : (n - 1 \times n)$ $(467172) = 4 = d$.

Die Summe von einer beliebigen Anzahl von Gliedern einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied = 1, und deren Differenz = 1, 2, 3, 4 ꝛc. ist, bildet die **Polygonalzahlen**. Ist das erste Glied = 1 und die Differenz = 1, dann entstehen die Trigonalzahlen, gleichseitige Dreiecke darstellend:

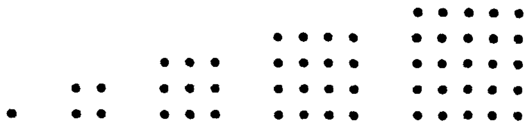
1 = 1
2 = 3
3 = 6
4 = 10
5 = 15
6 = 21
7 = 28
8 = 36 u. s. f. $\frac{n(n+1)}{1 \times 2}$.



1 3 6 10 15

Ist die Differenz = 2, dann entstehen die quadratischen Zahlen:

1 = 1
3 = 4
5 = 9
7 = 16
9 = 25
11 = 36
13 = 49
15 = 64 u. s. f. n^2.



1 4 9 16 25

Ist die Differenz = 3, dann giebt es die Pentagonalzahlen:

1 = 1		und	1 = 1
4 = 5			5 = 6
7 = 12			9 = 15
10 = 22			13 = 28
13 = 35			17 = 45
16 = 51			21 = 66
19 = 70			25 = 91
22 = 92 u. s. f.	$\frac{n(3n-1)}{1 \times 2}$		29 = 120 u. s. f. $n(2n-1)$

bei der Differenz = 4, die Hexagonalzahlen.

Legt man das größeste von den Trigonalzahlen gebildete Dreieck unten, darauf das folgende kleinere u. s. f. (und nimmt man, um eine stereometrische Größe zu haben, Kugeln anstatt der Punkte), dann entsteht eine dreiseitige Pyramide; die quadratischen Zahlen geben eine vierseitige, die Pentagonalzahlen eine fünfseitige Pyramide u. s. f. Die Glieder einer Reihe, welche aus der Summe der Polygonalzahlen (vom ersten Gliede an bis zu einem bestimmten Gliede gerechnet) bestehen, heißen daher Pyramidalzahlen. — Ordnet man die

Trigonalzahlen in eine Reihe, so bekommt man 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120 u. s. f. $= \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1 \times 2 \times 3}$; die quadratischen Zahlen geben 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204 u. s. f. $= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{1 \times 2 \times 3}$; die Pentagonalzahlen geben 1, 6, 18, 40, 75, 126, 196, 288 u. s. f. $\frac{n^2\,(n+1)}{1 \times 2}$; und die Hexagonalzahlen geben 1, 7, 22, 50, 95, 161, 252, 372 u. s. f. $= \frac{n\,(n+1)\,(4n+1)}{1 \times 2 \times 3}$.

Enthält z. B. in einer dreiseitigen Pyramide die eine Seite der untersten Schicht 30 Kugeln (n), wie viele liegen in dieser untersten Schicht? $\frac{n\,(n+1)}{1 \times 2}$; $\frac{30 \times 31}{1 \times 2} = 465$; und wie viele liegen in der vollständigen Pyramide? $\frac{n\,(n+1)\;(n+2)}{1 \times 2 \times 3}$; $\frac{30 \times 31 \times 32}{1 \times 2 \times 3} = 4960$. Ist die Pyramide unvollständig, und liegen auf jeder Seite der höchsten Schicht der abgestumpften Pyramide 5 Kugeln (m), wie viele Kugeln enthält dann diese Pyramide? $\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1 \times 2 \times 3} - \frac{m\,(m+1)\,(m+2)}{1 \times 2 \times 3}$; $\frac{5 \times 6 \times 7}{6} = 35 - 4960 = 4925$.

Enthält in einer vierseitigen Pyramide die eine Seite der untersten Schicht 30 Kugeln (n), diese Schicht also 30^2 (n^2), wie viele Kugeln enthält die vollständige Pyramide?

$$\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{1 \times 2 \times 3}\,;\ \frac{30 \times 31 \times 61}{6} = 9455;$$

und in der abgestumpften, wenn die Seite der höchsten Schicht 4 (m) enthält? $- \frac{m\,(m+1)\,(2m+1)}{1 \times 2 \times 3}$; $\frac{4 \times 5 \times 9}{6} = 30 - 9455 = 9425$.

II. Eine **geometrische Progression** ist eine Reihe von Zahlen, in welcher jede Stelle gefunden wird, wenn man die unmittelbar vorangehende mit einem bestimmten beständigen Factor (Exponent) multiplicirt; z. B. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 u. s. f., Exponent = 2. Bezeichnet man das erste Glied durch a, den Exponent durch e, die Anzahl der Glieder durch n, das **letzte Glied** durch t, und die **Summe** durch s; dann ist, da das folgende Glied durch Multiplication des vorhergehenden mit e gebildet ist, das zweite Glied = ae, das dritte = ae^2, das vierte = ae^3, mithin das nte Glied = ae^{n-1}; somit entsteht die Gleichung $t = ae^{n-1}$; und wenn man Logarithmen anwendet, Log. t = Lg. a + Lg. e^{n-1}, = Log. a + (n — 1) Lg. e. Z. B. a = 5, n = 15 und e = 2.

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } e = & 0{,}3010300 \times (n-1) \\ & \times\, 14 \\ \hline & 4{,}2144200 + \text{Lg. } a. \\ \text{Lg. } a = & 0{,}6989700 \\ \hline & 4{,}9133900 = \text{L. N. } 81920 = t. \end{array}$$

oder a = 5, n = 30 und e = $1\frac{7}{12}$, dann ist e = $\frac{19}{12}$ =

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 19 - \text{Log. } 12 = & 0{,}1995724 \times (n-1) \\ & \times\, 29 \\ \hline & 5{,}7875996 + \text{Lg. } a \\ \text{Lg. } a = & 6{,}6989700 \\ \hline & 6{,}4865696 = \text{L. N. } 3065982 = t. \end{array}$$

Wenn e kleiner als 1 ist, dann ist Log. e negativ, und man hat ihn n — 1 mal vom Log. a abzuziehen.

Für die Summe aller Glieder hat man die Gleichung:

$s = a + ae + ae^2 + ae^3 + \ldots\ldots + ae^{n-2} + ae^{n-1}$
$= a\,(1 + e + e^2 + \ldots\ldots e^{n-2} + e^{n-1})$; es ist also

$s = \dfrac{a\,(1 - e^n)}{1 - e}$ oder $s = \dfrac{a\,(e^n - 1)}{e - 1}$, je nachdem e kleiner oder größer ist.

Z. B. a = 5; n = 15 und e = 2.

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } e^n = & 0{,}3010300 \\ & \times\, 15 \\ \hline & 4{,}5154500 = \text{L. N. } 32768 - 1 = 32767 \times a \\ & \times\, 5 \\ \hline & 163835 : (e-1) = 1. \end{array}$$

oder a = 5, n = 30 und e = $1\frac{7}{12}$.

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } e^n = \text{Log. } e \times n = & 0{,}1995724 \\ & \times\, 30 \\ \hline & 5{,}9871720 = \text{L. N. } 970894{,}4 = e^n; \end{array}$$

$e^n - 1 = 970893{,}4$; $\times a = \times 5 = 4854467 : (e - 1) =$
$: (\frac{19}{12} - 1) = 8321943{,}4$ ......

Vermittelst dieser zwei Formeln: $t = ae^{n-1}$ und $s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}$ kann man, wenn von den 5 Größen a, e, t, n, s nur drei gegeben sind, die beiden fehlenden Glieder finden. Auch hier kommen 10 Fälle vor. 1) a, e, n, zu finden s und t. 2) a, e, t = s, n. 3) a, e, s = n, t. 4) a, n, t = e, s. 5) a, t, s = e, n. 6) a, n, s = e, t. 7) e, t, n = a, s. 8) e, t, s = a, n. 9) e, n, s = a, t. 10) t, n, s = a, e.

Auch hier mögen zur Verdeutlichung die Formeln, wie sie auf unserer Tafel gesetzt werden, eine Stelle finden:

1) a, e, n. $s = (e^n - 1 \times a) : e - 1$ •, $t = e^{n-1} \times a$ •,

2) a, e, t. $n = (\text{Lg. } t - \text{Lg. } a) : \text{Lg. } e\ [+1$ •, $s = (et - a) : (e - 1$ •,

3) a, e, s. $n = [\text{Lg. } (e - 1 \times s) + a \mid - \text{Lg. } a] : \text{Lg. } e$ •, $t = [(e - 1 \times s) + a] : e$ •,

4) a, n, t. $e = (\text{Lg. } t : \text{Lg. } a) : (n - 1$ •, $t = \left(\sqrt[n-1]{t^n} - \sqrt[n-1]{a^n}\right) : \left(\sqrt[n-1]{t} - \sqrt[n-1]{a}\right)$ •, (t wird sicherer und bequemer aus a, n, e gefunden, und kann man aus a, n, t das e nach Formel 4, und dann aus a, n, e nach Formel 1 das t suchen.)

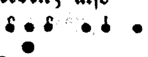
5) a, t, s. $e = (s - a) : (s - t)$ •, $n = [\text{Lg. } t - \text{Lg. } a] : [\text{Lg. } s - a \mid - \text{Lg. } s - t]\ \ [+1$ •,

7) e, t, n. $a = t : e^{n-1}$ •, $s = (e^n - 1 \times t) : (e^{n-1} \times e - 1)$ •,

8) e, t, s. $a = et - (e - 1 \times s)$ •, $n = [\text{Lg. } t - (\text{Lg. } et - \mid e - 1 \times s)] : \text{Lg. } e\ [+1$ •,

9) e, n, s. $a = (e - 1 \times s) : e^n - 1$ •, $t = (se^{n-1} \times e - 1) : e^n - 1$ •,

Die Bezeichnung der Klammern und Zeichen s. o. Arithmetische Progr. — Die Potenzerhebung e^{n-1} und $e^n - 1$ kann durch ein dem e in 9 und 3 mit Hakennadeln angehängtes n ɛc. bezeichnet werden; also

 e^{n-1} und $e^n - 1$ 

Bekannt ist die ungeheuere Summe, welche durch die geom. Progr. der 64 Schachbrettfelder entsteht, bei welcher das erste Glied = 1, der Exponent = 2, und n = 64 ist; also 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 u. s. f. $2^{64} - 1$; mit Logarithmen findet man die ersten 6 — 7 Stellen der 20zifferigen Zahl:

$$\begin{array}{r} \text{Log. } 2 = 0{,}3010300 \\ \times\ 64 \\ \hline 19{,}2659200 \end{array}$$

$= \text{L. N. } 18446 7\ldots$, welche 18,446744,073709,551615 ist. Legt man dieser Progr. eine factische Größe, ein Weizenkorn, zum Grunde, also auf das erste Feld des Schachbrettes 1 Waizenkorn, auf das zweite 2, das dritte 4, das vierte 8 Körner u. s. f., dann erkennt man deutlich die Unausführbarkeit der Forderung des Erfinders des Schachspieles, Sessa Ebn Daher. Ein Preußisches Pfund enthält ziemlich genau 9629 Waizenkörner; ein Preuß. Scheffel guten Waizens wiegt 85½ ℔, enthält demnach 823280 Körner; mithin betrüge obige Summe 22,406403,743209 Preuß. Scheffel; eine Quantität, welche in etwa 70 Jahren gewonnen werden könnte, wenn alles feste Land der Erde zum Anbau von Waizen benutzt würde.

Nicht minder bedeutend ist die Summe, welche entsteht, wenn man die Ernte von einem Scheffel Waizen, der durch jede Aussaat sich nur um das Siebenfache vermehrt, im folgenden Jahre wieder aussäet u. s. f. Ist $a = 1$ Scheffel, $e = 7$, dann ist die Ernte s in $n = 8$ Jahren, nach Formel I: 5,764,800 Scheffel.

Die geom. Progressionen, welche durch Zins-Zinsanhäufung entstehen, fanden oben (S. 92) bei der Anwendung der »Logarithmen« ihre Stelle.

IX. Combinationen, Permutationen und Variationen.

In einer **Combination** werden mehrere neben einander gestellte Größen nach bestimmten Bedingungen in Verbindung gebracht. Diese Verbindung kann die eines Zahlensystemes, oder der Addition $a + b$, oder $a - b$, oder ab, $a : b$, a^b $(a + b)^n$ u. s. w. sein. — Die Combinationen werden nach den gegebenen **Elementen** (den einzelnen Größen) Binionen (Amben), Ternionen (Ternen), Quaternionen, Quinionen, Sexionen u. s. f. n-tionen genannt, je nachdem sie aus 2, 3, 4, 5, 6 ꝛc. n-Elementen bestehen. Die verschiedenen Zusammenstellungen der Combinationen heißen **Complexionen**. — Die Elemente müssen gut **geordnet** sein, z. B. a.c.m.x.z.; 1.3.12.23.25. — Werden diese combinirten Elemente auf so viel verschiedene Arten versetzt, als es die Anzahl erlaubt, dann werden sie permutirt (**Permutationen**). Wird jedes Element nur einmal in verschiedene Combination gebracht, dann werden diese Elemente **ohne Wiederholung** combinirt und permutirt, z. B. abc nur 6mal; wird aber das eine oder andere, oder jedes Glied beliebig wiederholt combinirt, dann entstehen die Combinationen und Permutationen **mit Wiederholungen**; z. B. aabc, abbc u. s. f. Nimmt man mit den Combination-Complexionen noch alle möglichen Permutationen vor, dann entstehen die **Variationen**; wird hiebei jedes einzelne Glied in einer und derselben Complexion nur einmal gebraucht, dann wird **ohne Wiederholung** variirt; wird aber jedes Element in einer und derselben Complexion beliebig wiederholt versetzt, dann entstehen die Variationen **mit Wiederholungen**.

Die Combinationen zu Binionen giebt die zweite Klasse, zu Ternionen die dritte, zu Quaternionen die vierte u. s. f., z. B. a, b, c, d, e zu Binionen: ab, ac, ad, ae, ba, bc u. s. f.; zu Ternionen: abc, abd, abe, acb, acd, ace u. s. f. — Der Algorithmus ist:

$$m\overset{k}{\underset{o}{C}}n \quad m\overset{k}{\underset{w}{C}}n \quad m\overset{k}{\underset{o}{P}}n \quad m\overset{k}{\underset{w}{P}}n \quad m\overset{k}{\underset{o}{V}}n \quad m\overset{k}{\underset{w}{V}}n$$

m = Menge, Anzahl der möglichen C = Combinationen, P = Permutationen, V = Variationen; n die Zahl der Elemente, k = die Klasse, w = mit, o = ohne Wiederholung. Z. B. die Menge der Permutationen mit Wiederholung für 5 Elemente in der dritten Klasse $= m\overset{3}{\underset{w}{P}}5 = \ldots$

Zwei ungleiche Elemente geben nur 2 Permutationen, z. B. a, b, nur ab und ba; drei ungleiche Elemente (eine Ternion) z. B. a, b, c geben 1.2.3 = 6, abc, acb, cab, bca, bac cba. Eine Quaternion giebt 1.2.3.4 = 24; eine Quinion 120, eine Senion 720, eine Seption 5040 u. s. f.; also m Elemente geben 1.2.3.4.5..... (m — 1). m Permutationen.

Sind 2 Elemente gleich, a = b, also a = a, dann läßt sich die Größe, als Union, nur einmal permutiren; mit einem dritten Elemente c giebt es nur 3 Permutationen: aac, aca und caa; mit einem vierten nur 12, einem fünften nur 60, also m, worin 2 gleiche sind, $\frac{1.2.3.4 \ldots .(n-1).n}{1.2}$ u. s. f. je nach der Zahl der gleichen Elemente. Eben so geben 3 gleiche Elemente nur eine Union; ein viertes ungleiches Element kann 4 verschiedene Stellen einnehmen, als: $\frac{1.2.3.4}{1.2.3} = 4$; ein viertes und fünftes hat 20 mögliche Stellen, als: $\frac{1.2.3.4.5}{1.2.3} = \frac{120}{6} = 20$. Sind also von n Elementen m Elemente einander gleich, dann ist die Möglichkeit der Permutationen $= \frac{1.2.3.4.5 \ldots .(n-1).n}{1.2.3.4.5 \ldots .(m-1).m}$. Finden sich außer m Elementen noch t gleiche Elemente, dann kann ebenso $(t-1).t$ nur $=1$ gerechnet werden, und es entsteht $\frac{1.2.3.4.5 \ldots .(n-2).(n-1).n}{(1.2.3.4 \ldots m).(1.2.3.4 \ldots t)}$ u. s. f. mit allen andern Summen gleicher Elemente. Z. B. Die Summe n sei $= 1.2.3.4.5.6.7.8 = 40320$; $m = 2$ und $t = 2$ gleichen Elementen; also $\frac{40320}{(1.2).(3.4)} = 40320 : 24 = 1680$; oder $n = 1.2.3.4 \ldots .9.10 = 3628800$; $m = 2$, $t = 3$, $q = 5$; der Kürze wegen bezeichnet man dieses n durch n^*, $m = m^*$ u. s. f. und erhält $\frac{n^*}{m^*.t^*.q^*}$; $\frac{3628800}{(1.2).(1.2.3).(1.2.3.4.5)}$ $2.6.120 = 1440 : 3628800 = 2520$. — Die Complexion von 12 ungleichen Elementen läßt 479 001 600 Permutationen (ohne Wiederholung) zu; sind aber 6 gleiche Elemente darin $(1.2.3.4.5.6 = 1)$, dann giebt sie nur $\frac{1.2.3.4 \ldots 11.12}{1.2.3.4.5.6} = \frac{479\,001\,600}{720} = 665\,280$, oder $7.8.9.10.11.12 = 665\,280$.

Sollen n Elemente zu Binionen ohne Wiederholung combinirt werden, dann wird jedes Element mit allen andern, nur nicht mit sich selbst verbunden, und somit entstehen $n.(n-1)$ Combinationen für die erste Klasse; $\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2}$ für die zweite Klasse; $\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1.2.3.4}$ für die vierte Klasse; also für n Elemente und die mte Klasse:

$$\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)\ldots\ldots(n-.(m-1))}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots m}$$

Sollen n Elemente mit Wied. combinirt werden, dann erhält man $\frac{n.(n+1)}{1.2}$; z. B. a, b, c = 1, 2, 3 = aa, ab, ac, bb, bc, cc; $\frac{3.(3+1)}{2} = 6$. Combinirt man jede dieser Combinationen mit den gegebenen Elementen (a, b, c), dann entsteht die dritte Klasse = $\frac{n.(n+1).(n+2)}{1.2.3}$; wird so fortgefahren, dann giebt die vierte Klasse = $\frac{n.(n+1).(n+2).(n+3)}{1.2.3.4}$, da 4 und 4 dieser Combinationen immer gleich sind. Für die mte Klasse ist also die Anzahl der Combinationen mit Wiederholungen =

$$\frac{n.(n+1).(n+2).(n+3)\ldots.(n+(m-1)}{1.2.3.4\ldots\ldots(m-1).m}.$$

Sollen n Elemente zu Binionen ohne Wiederholung variirt werden, dann wird jedes Element mit allen andern, nur nicht mit sich selbst verbunden; also $n-1$ für die erste Klasse; $n.(n-1)$ für die zweite, $n.(n-1).(n-2)$ für die dritte Klasse u.s.f.; für die mte $= m.(n-1).(n-2)\ldots\ldots .n.(n-.(m-1))$.

Sollen endlich n Elemente zu Binionen mit Wiederholung variirt werden, dann verbinde man jedes Element mit sich selbst und mit jedem andern; also $n \times n = n^2$; a, b, c $= 3^2 = 9$; aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc. Hier werden also alle Combinationen der Elemente mit den Permutationen dieser Combinationen variirt. — Die Variationen für die dritte Klasse findet man, wenn man jede Variation der zweiten nochmals mit jedem Elemente verbindet, also $n^2 \times n = n^3 = 3^3 = 27$; für die siebente Klasse $= n^6 \times n = n^7 = 3^7 = 5093$; also für die mte Klasse $= n^m$.

Die Permutationen werden angewendet, wo man die mögliche Versetzung verschiedener Größen zu wissen verlangt; so z. B. die möglichen Veränderungen verschiedener Töne, Farben, Buchstaben, Wörter, Personen, Würfel, Karten, Nummern u. s. f.

Zum Theil beruht die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit auf den Principen der Permutationen.

Es sollen z. B. die möglichen Permutationen (ohne Wiederholung) der 25 Buchstaben a, b, c .... x, y, z gefunden werden. Mit Logarithmen findet man leicht die Anzahl der Ziffern dieser ungeheuern Zahl, wenn man Log. 1 + Lg. 2 + Lg. 3 ..... + Lg. 23 + Lg. 24 addirt, woraus 23,7926057 (= Num. 6204 ....) entsteht, also eine 24ziffrige Zahl = 100000 Trillionen Permutationen. Wenn 1000 Millionen Menschen die Erde bewohnen, und jeder Mensch schriebe täglich 40 Seiten, und jede Seite enthielte 40 dieser Permutationen, dann würden mehr als 1000 Mill. Jahre nöthig sein, um alle möglichen Permutationen der 24 Buchstaben zu schreiben. (40 . 40 . 365 . 1000000000 = 584 Billionen; 15 Ziffern in 24 Ziffern dividirt, giebt einen 10stelligen Quotienten, mithin 1000 Mill.). Genau ist diese horrende Zahl: $\overset{\text{III.}}{620448},\overset{\text{II.}}{401733},\overset{\text{I.}}{239439},360000$, und 1000 Mill. Menschen würden auf obige Art 1062410961 Jahre schreiben. — Mit Variationen giebt es sogar $\overset{\text{IV.}}{15},\overset{\text{III.}}{511210},\overset{\text{II.}}{043330},\overset{\text{I.}}{985984},000000$.

Die Permutationen von 12 Elementen sind 479001600; wenn 12 Glocken eines Glockenspieles alle möglichen Permutationen angeben sollen, und zu jeder Permutation nur 3 Secunden gebraucht werden; ebenso: wenn 12 um einen Tisch sitzende Personen alle möglichen Permutationen, und jede in 3 Secunden ausführen sollen, wie viel Zeit wird dazu nöthig sein? — 479001600 × 3 = 1437004800 : 60 = 23950080 : 60 = 399168 : 24 = 16632 : 365 = 45 Jahre 207 Tage. Wenn jede Permutation 10 Secunden Zeit fordert, also in 1 Min. 6 Permutationen ausgeführt werden, (das Jahr zu 12 Monaten, diesen zu 30 Tagen gerechnet):

$$\frac{1.2.3.4.5\ldots\ldots10.11.12}{6.60.24.30.12}\;\frac{=479001600}{=3110400} = 154 \text{ Jahre.}$$

Da in diesem Beispiele sich mehrere Factoren heben lassen, ist es ohne Schwierigkeiten im Kopfe zu berechnen. Die Multiplication mit 3, 5, 6, 8, 10 und 12 ist zu ersparen, da 3 . 8 = 24, 5 . 12 = 60, und 6 . 10 = 60 nachherige Divisorengrößen sind; also 2 . 4 . 7 . 9 . 11 = 5544 × 3 = 16632 : 365 = 45 Jahre

207 Tage; oder 5544 × 10 = 55440 : 365 = 151 Jahre 325 Tage, oder : 360 = 154 Jahre.

Die Ausführung dieser Rechnungen auf unserer Tafel ist keinen Schwierigkeiten unterworfen. Zwischen jedem Elemente wird das Zeichen der × (Spitznadel in 6) gesetzt; eine freie Knopfreihe (= Linie) trennt den ebenso in der dritten Reihe aufgesetzten Divisor. Große Multiplicationen werden rechts, große Divisionen links bearbeitet.

X. Buchstabenrechnung.

Buchstaben werden gebraucht als allgemeine Zeichen, als Symbole bestimmter Begriffe und Größen, bei denen man die Quantität nicht berücksichtiget. Sie stellen die wesentlichen Eigenschaften aller Arten von Größen, wie auch die Entwickelung der Gesetze des Zusammenhanges, die Regeln der Verbindung und Trennung der Größen in allgemeinen Ausdrücken dar. Sie bezeichnen aber Größen, denen bestimmte Zahlenausdrücke substituirt werden können. Eine Formel ist daher eine Form-Regel, eine allgemeine Rechnungsregel, deren allgemeinen Ausdrücken stets entsprechende Zahlenausdrücke substituirt, und somit durch sie vielfältig bezeichnete Aufgaben gelöset werden können. — Diese Symbole können bei allen Arten des Rechnens angewendet werden.

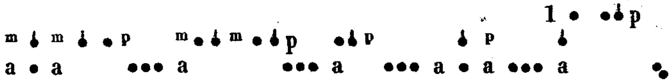
Die Bearbeitung der Buchstabenrechnung (welche dem geübten Kopfrechner nur in den Anfängen zugänglich ist) hat auf unserer Tafel zwar einige Schwierigkeiten. Indessen wird der Blinde, welcher die Grundoperationen der Arithmetik und das Buchstaben-Lesen auf dieser Tafel gut geübt hat, diese Schwierigkeiten leicht überwinden, und bald mit Leichtigkeit seine geordneten Sätze lesen und bearbeiten. Die Zeichen +, —, × und : (s. o. pag. 16) werden immer mit Spitznadeln bezeichnet, und dürfen nicht gespart werden. Das Zeichen der Gleichheit =, des Bruchstriches /, verticalen Theilungsstriches |, der Parenthesen [( )], und des Endzeichens s. o. pag. 16; Wurzel √ und Potenzbezeichnung s. o. pag. 75 u. 76; alle müssen so viel geübt werden, daß sie in ihrer Handhabung kein Nachdenken mehr erfordern.

Kommen mehrere Klammern in einander vor, dann werden die äußeren durch 2 Spitznadeln in 3 und 5, am Ende in 9 und 7, die inneren durch 2 glatte große Nadeln in 3 und 5, am Ende in 9 und 7, die dritten inneren durch den Verticalstrich mit 2 Spitznadeln in 2 und 6, und die innersten durch einen Verticalstrich mit glatten Großknöpfen in 2 und 6 bezeichnet.

Bei Addition, Subtraction und Multiplication werden die Summanden, Minuendum und Subtractor, Multiplicandum und Multiplicator unter einander gesetzt, und die Summe, der Rest oder das Product, von der Aufgabe durch eine freie Knopfreihe (= Linienreihe) getrennt (s. o. S. 22 u. 23); die Zeichen +, —, × werden entsprechend vorgesetzt. Bei der Division wird hier nicht unzweckmäßig das Dividendum voran, dahinter :, dann Divisor, dann =Zeichen, dahinter der Quotient angelegt. Anstatt des, das Dividendum von dem unter ihm stehenden Divisor trennenden horizontalen Striches gebrauchen wir einen Bruchstrich mit 2 Spitznadeln in 3 und 7, in fortlaufender Reihe; (bei wirklichen Brüchen wird dann der Bruchstrich mit 2 glatten Nadeln gebildet;) oder man schließt Dividendum und Divisor, durch : getrennt, gesondert in einer Klammer ein. Z. B. $\frac{a\,c}{b\,d} = \frac{a\,c : d}{b} = \frac{a}{b\,d : c} = \frac{a : d}{b : c}$ auf der Tafel: $a\,c \bullet b\,c = (a\,c \bullet d) \bullet b = (a \bullet b\,d) \bullet c = (a \bullet d \bullet b \bullet c)$.

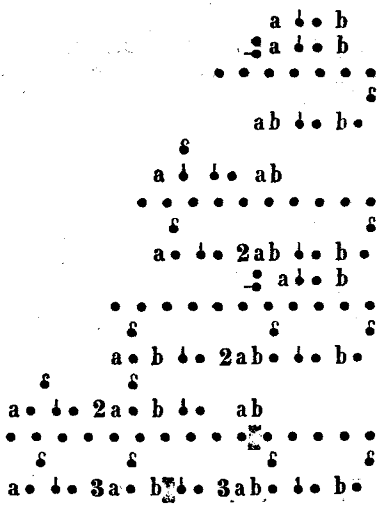
Wo Potenzen vorkommen, werden diese in der Reihe über der Aufsatzreihe durch Hakennadeln bezeichnet, die Exponenten mögen Buchstaben oder Zahlen sein. Hat der Exponent ein ×, —, × oder : Zeichen, mit oder ohne Klammer, dann wird dieses in dieser oberen Reihe mit einer Spitznadel gesetzt. Der Exponent wird bei Buchstaben- und Zahlengrößen über der zu potenzirenden Größe angelegt; ist diese mehrstellig, dann über der letzten Stelle. Bei dem √ Zeichen wird er ebenfalls über demselben angebracht, gleichviel ob er einfach ist, oder ob mehrere Exponenten durch Zeichen

verbunden sind. Z. B. $a^m : a^{m+p} = a^{m-m-p} = a^{-p} =$
1
$a : a^p = a^{-p}$.

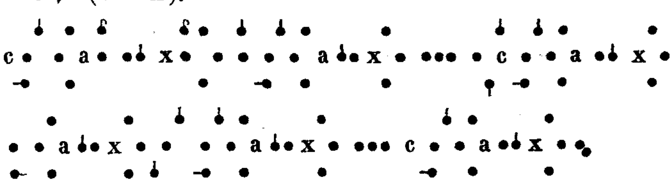


Sehr zweckmäßig ist es, bei Potenzirungen und Radicationen links in der ersten Verticalreihe, über der Aufsatzreihe in die erste Primknopfstelle eine Hakennadel zu setzen, um die Aufmerksamkeit auf vorkommende Exponenten zu richten. Einfache Exponenten kann man auch in fortlaufender Reihe mit Hakennadeln setzen. Z. B.:

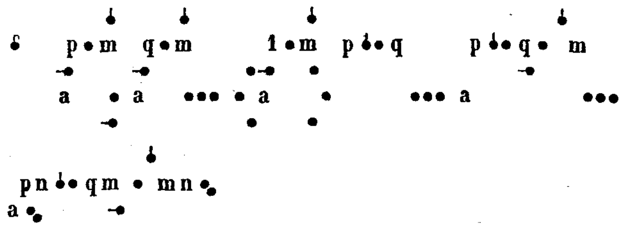
$$\begin{array}{r}
a + b \\
\times\, a + b \\
\hline
ab + b^2 \\
a^2 + ab \quad\; \\
\hline
a^2 + 2ab + b^2 \\
\times\, a + q \\
\hline
a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
a^3 + 2a^2b + \;\, ab \quad\quad\;\; \\
\hline
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
\end{array}$$



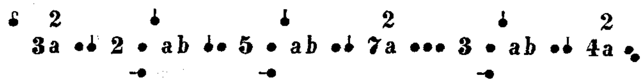
Z. B. $c\sqrt{(a^2 - x^2)} : \sqrt{(a+x)} = \dfrac{c\sqrt{(a-x)\,(a+x)}}{\sqrt{(a+x)}} = c\sqrt{(a-x)}$.



Z. B. $a^{\frac{p}{m}} \,.\, a^{\frac{q}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^{p+q} = a^{\frac{p+q}{m}} = a^{\frac{pn+qm}{mn}}$



Z. B. $3a^2 - 2\sqrt{ab} + 5\sqrt{ab} - 7a^2 = 3\sqrt{ab} - 4a^2$.



Die **Buchstaben** werden mit zwei kleinen Nadeln gesetzt (s. o. S. 17 u. 18). Sollten bei höheren Rechnungsarten große Buchstaben neben kleinen vorkommen, dann dürften die ersteren mit 2 großen Glattknöpfen gesetzt werden (s. o. S. 15.). Exponenten-Buchstaben werden immer mit 2 Hakennadeln gesetzt. — Bekannte Größen bezeichnet man durch a, b, c, d, e, f, g, h ꝛc.; unbekannte durch x, y, z. — In **Formeln** hat jeder Buchstabe seinen bestimmten, benennbaren Werth, weshalb jede Formel einer Vorerklärung der Buchstaben bedarf. So bezeichnet man Summe = s, Anzahl = n, Product, Gewicht = p, Quotient = q, Exponent = e, Zeit, Temperatur = t, Rest, Rente = r, Capital = c, u. s. f.

Jede Größe, welche aus einem Gliede besteht, heißt eine einnamige, ein **Monomium**, z. B. a; b; c; $\frac{a}{b}$; ab ꝛc. Jede zweigliedrige Größe heißt eine zweinamige, ein **Binomium**, z. B. $ab + c$; $ac - b$; $a : b + c$ ꝛc. Eine drei- und viergliedrige Größe ein Trinonium und ein Quadrinomium; im Allgemeinen nennt man eine Größe mit mehr als zwei Gliedern ein **Polynomium**. Zusammengesetzte Größen heißen auch **complexe** Größen, oder ein Aggregat von Größen; man umschließt sie mit Klammern; z. B. $(a + b - c) - (d + e)$; $x = [(f + q) d - e - h] de$, u. s. f. Soll die Summe einer Größe mehrmals genommen werden, dann setzt man vor die Größe die entsprechende Quantität in einer Zahl ausgedrückt, und diese heißt: der **Coëficient**; z. B. $a + a + a = 3a$; $2a + 7a + 5a = 14a$; $9a - 5a + 3a = 7a$ u. s. f.

1. Addition. $a+b=c.$

Gleichartige Größen sollen vereiniget werden. Einstimmige Größen (positive $+$, und negative $-$) werden durch Hinzuzählen vereiniget; z. B. $(+a)+(+b)=+(a+b)$ und $(-a)+(-b)=-(a+b)$ | $(+2)+(+5)=+(2+5)=+7$; und $(-2)+(-5)=-(2+5)=-7$. Positive Größen bezeichnet man im Allgemeinen nicht, negative aber immer. Gleiche $+$ und $-$ Größen heben sich gegenseitig auf; die Summe ist $=0$; z. B. $(+a)+(-a)=0$. Bei ungleichen $+$ und $-$ Größen zählt man die kleinere von der größeren ab, und giebt dem Reste das Vorzeichen der größeren; z. B. $(+a)+(-b)=+(a-b)$; $(-a)+(+b)=-(a-b)$ | $(+7)+(-3)=+(7-3)=+4$; $(-7)+(+3)=-(7-3)=-4$. Nur Gleiches kann mit Gleichem addirt werden, a zu a, b zu b ꝛc. Bei gleichen Größen mit verschiedenen Coëfficienten werden letztere addirt, und ihnen der gemeinschaftliche Buchstaben angehängt; oder der kleinere von dem größern Coëfficienten abgezogen, und dem Reste in der Summe das Zeichen des größern vor-, und des gemeinschaftlichen Buchstaben nachgesetzt.

Soll eine complexe Größe zu einer andern addirt werden, dann verbindet man alle Größen mit den ihnen zukommenden Zeichen, z. B. $(4a+9b-2c)+(-3a-5b+8c)=4a-3a+9b-5b-2c+8c=a+4b+6c$;

und zwar
$$\begin{array}{r} 4a+9b-2c \\ +(-3a-5b+8c \\ \hline a+4b+6c \end{array}$$

Z. B. $-a-c+b-d+f=b+f-(a+c+d)$. | $5a-b+15c-6a+d=15c+d-(a+b)$.

Z. B.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
8ab+ & 2ac+ & 3bc+ & 7dn- & 3x & \\
2ab+ & 5ac- & 6bc- & dn- & 5x & a+b=(a+b) \\
-7ab+ & 3ac- & 5bc+ & 8dn+ & 7x & (-a)+(-b)=-(a \\
9ab- & 7ac+ & bc\ . & . - & 2x & +b) \\
-3ab\ . & .\ + & 7bc- & 2dn\ . & . & (-a)+b=-(a-b) \\
-5ab- & 6ac- & 2bc- & 3dn+ & 4x & a+(-b)=+(a-b) \\
\hline
19ab+ & 10ac+ & 13bc+ & 15dn+ & 11x & \\
-15ab- & 13ac- & 13bc- & 6dn- & 10x & \\
\hline
4ab- & 3ac\ . & .\ + & 9dn+ & x. &
\end{array}$$

II. Subtraction. $c - a = b$.

Der Unterschied zwischen zwei Größen soll gefunden werden. Sind Minuendum (m) und Subtractor (s) + oder — Größen, dann nimmt man den Subtractor im entgegengesetzten Sinne, mit umgekehrten Zeichen, und addirt ihn zu dem Minuendum, um den Rest (r) zu finden.

$m = (\mp s) + r$ addirt $(\pm s) = (\mp s)$	$12 = (\mp 9) + 3$ addirt $(\pm 9) = (\mp 9)$
$m + (\pm s) = \quad r = m - (\mp s)$	$12 + (\pm 9) = 3 = 12 (\mp 9)$

+ und —, Addition und Subtraction, sind entgegengesetzte Operationen; anstatt + abzuziehen, addirt man eine — Größe, und umgekehrt. Man ändert also im Minuend das Vorzeichen, löset die Klammer, und bildet die algebraische Summe. Z. B. $8a - (+5a) = 8a - 5a = 3a$ | $2a - (-4a) = 2a + 4a = 6a$ | $-7x - (-2x) = -7x + 2x = -5x$ | $6a - (+2b) = 6a - 2b$.

1) $\dfrac{\begin{array}{c}+a\\ -+a\end{array}}{0} = \dfrac{\begin{array}{c}-a\\ +-a\end{array}}{0} = +(a-a) = 0.$ $\quad \dfrac{\begin{array}{c}+20\\ -+20\end{array}}{0} = \dfrac{\begin{array}{c}+20\\ +-20\end{array}}{0} =$

$+20 - 20 = 0.$

2) $\dfrac{\begin{array}{c}-a\\ --a\end{array}}{0} = \dfrac{\begin{array}{c}-a\\ ++a\end{array}}{0} = -(a+a) = 0.$ $\quad \dfrac{\begin{array}{c}-20\\ --20\end{array}}{0} = \dfrac{\begin{array}{c}-20\\ ++20\end{array}}{0} =$

$+20 - 20 = 0.$

3) $\dfrac{\begin{array}{c}+a\\ -+b\end{array}}{+(a-b)} = \dfrac{\begin{array}{c}+a\\ +-b\end{array}}{+(a-b)} = +(a-b).$ $\quad \dfrac{\begin{array}{c}+20\\ -+6\end{array}}{+14} = \dfrac{\begin{array}{c}+20\\ --6\end{array}}{+14} =$

$+20 - 6 = +14.$

4) $\dfrac{\begin{array}{c}-a\\ --b\end{array}}{-(a-b)} = \dfrac{\begin{array}{c}-a\\ ++b\end{array}}{-(a-b)} = -(a-b).$ $\quad \dfrac{\begin{array}{c}-20\\ -+6\end{array}}{-14} = \dfrac{\begin{array}{c}-20\\ ++6\end{array}}{-14} =$

$-20 - 6 = -14.$

5) $\dfrac{\begin{array}{c}-b\\ --a\end{array}}{+(a-b)} = \dfrac{\begin{array}{c}-b\\ ++a\end{array}}{+(a-b)} = +(a-b).$ $\quad \dfrac{\begin{array}{c}-6\\ --20\end{array}}{+14} = \dfrac{\begin{array}{c}-6\\ ++20\end{array}}{+14} =$

$+20 - 6 = +14.$

6) $$\frac{\begin{array}{r}+b\\ -+a\end{array}}{-(a-b)} = \frac{\begin{array}{r}+b\\ +-a\end{array}}{-(a-b)} = -(a-b). \quad \frac{\begin{array}{r}+6\\ -+20\end{array}}{-14} = \frac{\begin{array}{r}+6\\ +-20\end{array}}{-14} =$$
$$-20-6=-14.$$

7) $$\frac{\begin{array}{r}+a\\ --b\end{array}}{+(a+a)} = \frac{\begin{array}{r}+a\\ ++b\end{array}}{+(a+b)} = +(a+b). \quad \frac{\begin{array}{r}+20\\ --6\end{array}}{+26} = \frac{\begin{array}{r}+20\\ ++6\end{array}}{+26} =$$
$$+20+6=26.$$

8) $$\frac{\begin{array}{r}-a\\ -+b\end{array}}{-(a+b)} = \frac{\begin{array}{r}-a\\ +-b\end{array}}{-(a+b)} = -(a+b). \quad \frac{\begin{array}{r}-20\\ -+6\end{array}}{-26} = \frac{\begin{array}{r}-20\\ +-6\end{array}}{-26} =$$
$$-20+6=-26.$$

Hier gelten also drei **Subtractionsregeln**: 1) Soll eine Größe von einer gleichnamigen größeren mit demselben Zeichen subtrahirt werden, dann subtrahire man wirklich, und gebe dem Reste das Zeichen der vorliegenden Größe. Soll sie aber von einer gleichnamigen kleineren subtrahirt werden, dann wird umgekehrt abgezogen, und der Rest erhält das entgegengesetzte Zeichen. — 2) Soll eine Größe von einer gleichnamigen andern mit dem entgegengesetzten Zeichen subtrahirt werden, dann werden beide Größen addirt, und die Summe erhält das Zeichen des Minuendus. — 3) Soll eine Größe von einer ungleichnamigen andern subtrahirt werden, dann verändert sie im Reste ihr Zeichen in das entgegengesetzte.

Z. B.
$$\begin{array}{r}13a+9b+7c=+29\\ -(-5a-6b-c=-12\\ \hline +8a+3b+6c=+17\end{array}$$

Z. B.
$$\begin{array}{r}2a-e-h-l=+2-3=-1\\ -(-9a+3e-4h+l+c=+5-13=-8\\ \hline -7a+2e-5h+c=+3-12=-9\end{array}$$

Z. B.
$$\begin{array}{rrrrr}5a & +3b & -2bc & +7d & \\ -(-a & -8b & -3bc & +4d & -10\\ + & + & + & - & +\\ \hline 6a & +11b & +bc & +3d & +10\end{array}$$

Z. B.
$$\begin{array}{rrrrr}7a & & +3c & -9d & +12m\\ -(20a & +4b & -10c & +3d & \\ - & - & + & - & +\\ \hline -13a & -4b & +13c & -12d & +12m\end{array}$$

3. B.
$$\begin{array}{r} 9a - 3b + 2c \\ -(3a - 5b + 8c - d \\ + \quad - \quad + \\ \hline 6a + 2b - 6c + d \end{array}$$

Soll ein **Bruch** a/b zu einem Ganzen c addirt oder von ihm subtrahirt werden, dann multiplicirt man c durch den Nenner b, und theilt das Product bc durch den Nenner b; man erhält also $\frac{bc}{b}$; man zieht nun die Zähler zusammen, und giebt der Summe den gemeinschaftlichen Nenner b; also $\frac{a}{b} \pm c = \frac{a}{b} \pm \frac{bc}{b} = \frac{a \pm bc}{b}$. Soll die Summe oder die Differenz zweier Brüche gefunden werden, dann werden diese gleichnamig gemacht, und wird ihnen ein Nenner gegeben, der gleich ist dem Resultate aller gegebenen Nenner; die Zähler werden dann vereiniget. Z. B. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$. Ebenso bei mehreren Brüchen; z. B. $\left(a + \frac{b}{c}\right) + \frac{x}{y} - \left(\frac{m}{c} - \frac{p}{q}\right)$ $= \frac{acqy + bqy + cpy + cqx - mqy}{cqy}$.

Z. B.
$$\begin{array}{r} \frac{3a}{3} - 12b + \frac{3c}{4} + 15d \\ -(2a - \frac{5b}{7} + 12c - \frac{d}{2} \\ \hline -\frac{4a}{3} - \frac{79b}{7} - \frac{45c}{4} + \frac{31d}{2} \end{array}$$

Auf der Tafel: • ! 4 a ⋰ 3 • ! 79 b ⋰ 7 u. s. w

Die **Zeichen** + und — werden gebraucht: als **Rechnungszeichen** (der Addition und Subtraction) oder als **Vorzeichen**, welche bezeichnen, ob die nachfolgende Größe (zu welcher das Vorzeichen gehört) positiv oder negativ ist. Das Zeichen + wirkt auf eine eingeklammerte Größe nicht anders, als auf eine nicht eingeklammerte, z. B. $a + (b + c - d) = a + b + c - d$; $[20 + (3 + 4 - 5) = 20 + 2 = 22$, oder $20 + 3 + 4 - 5 = 22]$. Das Zeichen — aber fordert bei Lösung der ( ) Umkehrung der

Zeichen, wobei dem ersten Gliede (welches ohne Vorzeichen stets + ist) ein bestimmendes Vorzeichen gegeben werden muß; z. B. $a - (b + c - d) = a - b - c + d$; [$20 - (2 + 3 - 4)$ ($= - 1) = 19$; mit gelöseten Klammern und beibehaltenen Zeichen: $20 - 2 + 3 - 4 = 17$; mit gelöseten Klammern und umgekehrten Zeichen: $20 - 2 - 3 + 4 = 19$]. — Bei der Multiplication und Division erhält das Product und der Quotient aus je zwei gleich bezeichneten Gliedern, +, aus je zwei ungleich bezeichneten, — Zeichen. Z. B. $(a + b - c) \times (d + e - f) = ad + bd - cd + ae + be - ce - af - bf + cf$; [$(20 + 2 - 3) \times (4 + 5 - 6) = (19 \times 3 = 57$; $20 . 4, + 2 . 4, - 3 . 4, + 20 . 5, + 2 . 5, - 3 . 5, - 20 . 6, - 2 . 6, + 3 . 6 = 57$.] u. s. f.

III. Multiplication. $a + a + a + a = p$, oder $a . 4 = p$, oder $4a = p$.

Größen sollen durch eine andere im bestimmten Maaße vergrößernde Größe (einen Factor) vermehrt werden.

Einstimmige Factoren geben ein + Product, widerstreitende Factoren ein — Product. Die Bezeichnung der Multiplication ist . oder ×; bei Buchstabenausdrücken kann man sie weglassen, nicht aber bei Zahlen; zwei und mehrere neben einander stehende Buchstaben, dito Parenthesen, dito Buchstaben hinter einer ( ), ohne weitere Bezeichnung, sollen multiplicirt werden, z. B. $ab = a \times b$; $(m - 1)(m - 2)n = (m - 1) \times (m - 2) \times n$; $(c + y - r)d = (c + y - r) \times d$ u. s. f.

1) Positive Factoren geben + Product; z. B. $(a + b) \times (+c) = a \times c + b \times c = ac + bc$; $(5 + 3) \times (+ 4) = + 32$, denn $5 . 4 = 20$, $3 . 4 = 12$, $20 + 12 = 32$; ebenso $+ 15 . + 9 = + 135$ | $(a + b) . (c + d) = ac + bc + ad + bd$ | $(a + b) . (a + b) = aa + aab + bb$; $(5 + 7) . (5 + 7) = 5 . 5 + 5 . 7 + 7 . 5 + 7 . 7 = 144 = 12 . 12$.

2) Negative Factoren geben ein + Product; eine negative Größe mit einer andern negativen multiplicirt, giebt ein positives Product; z. B. $(a - b) \times (- c) = + (ac - bc)$; $(5 - 3) \times (- 4) = + 8$; denn $5 . 4 - 3 . 4 = + 8$ | $15 . - 9 = + 135$ | $(a - b) . (c - d) = (ac - bc) + (- ad + bd) = ac - bc - ad + bd$; denn $a - b . c = ac - bc$; dieses Product ist aber zu groß, weil nur mit $c - d$ multiplicirt werden soll; $(a - b) \times (+ d) = ad - bd$; dieses Product abgezogen,

giebt — ad + bd; z. B. c = 4 und d = 2; (a + b) . 4 = 4a + 4b, und umgekehrt (a — b) . 4 = 4a — 4b, oder ca — cb; ebenso (a — b) . (4 — 2) = 4a — 4b; die Größe a — b soll aber zweimal weniger als 4mal genommen werden; es muß also 2a — 2b abgezogen werden; es bleibt also 4a — 4b — 2a — 2b, d. i. = ac — bc — ad + bd. Ebenso (a — b) . (a — b) = aa — 2 ab + bb.

Z. B. $3\,ad \times 5\,cd = 15\,acdd = 15\,acd^2$ | $7\,a^2 \times 5\,a^4 = 35\,a^6$ | $10\,a^n \times 5\,a^3 = 50\,a^{n+1}$ | $-3\,a^{-7} \times -5\,a^{-2} = 15\,a^{-9}$ | $4\,abc \times (-3\,acd) = -12\,a^2bc^2d$ | $(-3\,a^2bc^2) \times (-5\,a^3b^2c^4d) = 15\,a^5b^3c^6d$ | $(a^2 - 4\,b + 2\,c)\,d = a^2d - 4\,bcd + 2\,cd$ |

3) Eine negative Größe mit einer positiven multiplicirt, giebt ein negatives Product; z. B. (a — b) × (+ c) = — ac — bc; denn da a — b ist, muß das Product bc auch um bc kleiner sein, als ac; (5 — 3) × (+ 4) = — 8; denn — 5 . 4 = — 20, — 3 . 4 = — 12, — 20 — 12 = — 8; ebenso — 15 . + 9 = — 135; (a — b) . (c + d) = ac — bc — ad — bd | (a — b) . (a + b) = — aa — bb; (7 — 5) . (7 + 5) = 7 . 7 — 5 . 5 = 24 = 2 . 12.

4) Eine positive Größe mit einer negativen multiplicirt, giebt ein negatives Product; z. B. (a + b) × (— c) = ac — bc; (5 + 3) × (— 4) = — 32, denn — 5 . 4 = — 20, — 3 . 4 = — 12, — 20 — 12 = — 32 | + 15 . — 9 = — 135 | (a + b) . (c — d) = ac + bc — ad — bd | (a + b . (a — b) = — (aa — bb.

Soll eine complexe Größe mit einer einfachen multiplicirt werden, dann multiplicire man jeden Theil derselben mit der einfachen Größe, und setze diese Producte mit den ihnen zukommenden Zeichen zusammen; z. B. (a + b) c = ac + bc | (a + b — c — d + e + f) g = ag + bg — cg — dg + eg + fg.

Z. B.
$$\begin{array}{r} 7\,ad \quad - 15\,bc \quad - 16\,acf \\ \times\ 10\,ab \\ \hline 70\,a^2bd - 150\,ab^2c - 160\,a^2bcf \end{array}$$

Soll eine complexe Größe mit einer andern complexen Größe multiplicirt werden, dann multiplicire man mit jedem einzelnen Gliede des Multiplicators den Multiplicandus, und addire die Producte; z. B. (a + b) . (c + d) = ac + bc + ad + bd; ebenso (a + b) . (c — d) = ac + bc — ad + bd.

Z. B. $(a^2 - 4bc + 2c) \,.\, (2a - 3b) = (a^2 - 4bc + 2c) \,.\, 2a - (a^2 - 4bc + 2c) \,.\, 3b$; löset man die Klammern, dann giebt es: $2a^3 - 8abc + 4ac - 3a^2b + 4b^2c - 6bc$, d. i. $= 2a^3 - 3a^2b - 8abc + 4ac + 4b^2c - 6bc$.

Z. B.
$$\begin{array}{r} a + b - c \\ \times\, d - e \\ \hline -ae - be + ce \\ ad + bd - cd \\ \hline ad + bd - cd - ae - be + ce \end{array}$$

Z. B.
$$\begin{array}{rrrr} & a + & b & + c \\ & \times\, a + & b & - c \\ \hline & -ac & - bc & - cc \\ & ab & + bb & + bc \\ aa + & ab & + ac & \\ \hline aa + & aab & + bb & - cc. \end{array}$$

Z. B.
$$\begin{array}{r} 3a^2 + 2ab + b^2 \\ \times\;\; 4ab - 2b \\ \hline 12a^3 + 8a^2b + 4ab^2 \\ - 6a^2b - 4ab^2 - 2b^3 \\ \hline 12a^3 + 2a^2b \;\; \ldots\; - 2b^3 \end{array}$$

I Soll ein Bruch mit einem Ganzen multiplicirt werden, dann

1) multiplicirt man den Zähler mit dem Ganzen und läßt den Nenner unverändert. Z. B. $\frac{a}{b} = c$ ($^{20}/_4 = 5$) oder $a = bc$; $\frac{a}{b} \times n$, ($^{20}/_4 \times 2$), $na = nbc$, oder $\frac{na}{b} = nc$, ($2 \,.\, 20 = 2 \,.\, 4 \,.\, 5$, oder $\frac{2 \,.\, 20}{4} = 2 \,.\, 5$); z. B. $^3/_4 b \times 17a = {}^{51}/_4 ab$; z. B. $^5/_8 \times 7 = 5 \,.\, 7 = {}^{35}/_8 = 4^3/_8$. Oder

2) Man dividirt das Ganze in den Nenner, und läßt den Zähler unverändert; z. B. $\frac{a}{nb} = c$, also $a = nbc$, ($\frac{20}{2 \,.\, 4} = 2\frac{1}{2}$; $20 = 2 \,.\, 4 \,.\, 2\frac{1}{2}$), $na = (nb \times nc)$, ($2 \,.\, 20 = 2 \,.\, 4 \,.\, 2 \,.\, 2\frac{1}{2}$ oder $\frac{2 \,.\, 20}{2 \,.\, 4} = 2 \,.\, 2\frac{1}{2}$ oder $\frac{20}{4} = 2 \,.\, 2\frac{1}{2}$). Z. B. $^7/_{24} \times 6 = {}^7/_4 = 1^3/_4 = {}^{42}/_{24} = 1^{18}/_{24}$. Oder

3) Man dividirt den Nenner in das Ganze, und multiplicirt den Quotienten mit dem Zähler; z. B. $\frac{a}{b} = c$, also $a = bc$; dann ist $nab = nbbc$; oder $\frac{nab}{b} = nbc$, oder $na = nbc$, ($\frac{20}{4} = 5$, also $20 = 4 \,.\, 5$; dann ist $2 \,.\, 20 \,.\, 4 = 2 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 5 = 160$;

oder $\frac{2 \,.\, 20 \,.\, 4}{4} = 2 \,.\, 4 \,.\, 5$, oder $2 \,.\, 20 = 2 \,.\, 4 \,.\, 5$); z. B. $\frac{4}{9} \times 18$, $9 : 18 = 2$, $2 \,.\, 4 = 8$; oder $4 \,.\, 18 = \frac{72}{9} = 8$.

II. Sollen zwei Brüche mit einander multiplicirt werden, z. B. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ ($\frac{20}{4} \times \frac{2}{5}$) dann

1) multiplicirt man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner; z. B. $\frac{ac}{bd} = \frac{ac:d}{b} = \frac{a}{bd:c} = \frac{a:d}{b:c}$; ($\frac{20 \,.\, 2}{4 \,.\, 5} = \frac{20 \,.\, 2:5}{4} = \frac{20}{4 \,.\, 5:2} = \frac{20:5}{4:2}$). Z. B. $\frac{7}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{21}{72} = \frac{7}{24}$. Ebenso bei mehreren mit einander zu multiplicirenden Brüchen; z. B. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{m}{c} \times \frac{x}{y} = \frac{acmx}{bdcy} = \frac{amx.c}{bdy.c} = \frac{amx}{bdy}$. Oder

2) Man kehrt den einen Bruch um, und dividirt den neuen Zähler in den Nenner des andern (unveränderten) Bruches; z. B. $\frac{a}{b} \times \frac{bm}{an} = \frac{abm}{ban} = \frac{m}{n}$; ($\frac{12}{4} \times \frac{4.5}{12.6} = \frac{12.4.5}{4.12.6} = \frac{240}{288} = \frac{5}{6}$.
Z. B. $\frac{3}{14} \times \frac{7}{9} = \frac{21}{126} = \frac{1}{6}$, umgekehrt $\frac{14}{3} \times \frac{7}{9} = \frac{1/2}{3} = \frac{1}{6}$.
Z. B. $\frac{7}{15} \times \frac{4}{7} = \frac{28}{105} = \frac{4}{15}$, umgekehrt $\frac{4}{7} \times \frac{15}{7} = \frac{3\frac{3}{4}}{1} = \frac{15}{4} = \frac{4}{15}$.

IV. Division. $a : b = q$, oder $\frac{a}{b} = q$.

Größen sollen durcheinander gleichmäßig getheilt werden; Dividendum durch Divisor gleichmäßig getheilt, geben den Quotienten; der Divisor ist das Maas; der Quotient zeigt, wie oft dieser genommen werden muß, um das Dividendum durch Multiplication zu erzeugen. Ist dieses genau ausführbar, dann ist der Quotient eine ganze Größe oder Zahl; bleibt ein Theil übrig, dann zerfällt man den Divisor in seine einzelnen Einheiten; dadurch entsteht ein ächter Bruch, dessen (kleinerer) Zähler der Rest, und dessen (größerer) Nenner der Divisor ist. Nimmt man das (größere) ungetheilte Dividendum als Zähler, und den (kleinern) Divisor als Nenner, dann entsteht ein unächter Bruch. Z. B. $3 : 587 = 195\frac{2}{3}$ oder $= \frac{587}{3}$.

Einstimmige Größen (gleiche Zeichen) im Divisor und Dividendum geben + Quotienten; widerstreitende Größen (ungleiche Zeichen) im Divisor und Dividendum geben — Quotienten (q).

Divisor + u. Dividendum — = q +	$+a : +b = +\frac{a}{b}$
„ — u. „ — = q +	$-a : -b = +\frac{a}{b}$
„ + u. „ — = q —	$+a : -b = -\frac{a}{b}$
„ — u. „ + = q —	$-a : +b = -\frac{a}{b}$

$\frac{+ab}{+a} = +b$	$\frac{+12 \cdot 3}{+12} = +3$
$\frac{-ab}{-a} = +b$	$\frac{-12 \cdot 3}{-12} = +3$
$\frac{+ab}{-a} = -b$	$\frac{+12 \cdot 3}{-12} = -3$
$\frac{-ab}{+a} = -b$	$\frac{-12 \cdot 3}{+12} = -3$

Der Coëficient des Dividendums wird durch den Divisor getheilt. $+5a : +3b = \frac{+5a}{+3b}$ | $-12\,abcde : -8\,acd = +\frac{3bc}{2}$ | $+12a : -4b = -\frac{12a}{4b} = -\frac{3a}{b}$ | $-16a : +8b = -\frac{16a}{8b} = -\frac{2a}{b}$ | $a : ab = \frac{a}{ab} = \frac{1 \cdot a}{b \cdot a} = \frac{1}{b}$ | $abc : b = \frac{abc}{b} = \frac{ac \times b}{b} = ac$ | $abc : a = bc$ | $abc : ad = \frac{bc}{d}$ | $\frac{abcde}{ab} = cde$ | $\frac{abcde}{bd} = ace$ | $\frac{abcde}{ace} = bd$ | $\frac{abcde}{acde} = b$.

Soll eine complexe Größe durch eine einfache Größe dividirt werden, dann dividirt man jedes Glied der ersteren durch den Divisor, und verbindet die Quotienten durch die ihnen zukommenden Zeichen zum Hauptquotienten. Z. B. $(3ac - 2ade - f + \frac{c}{d}) : 2a = \frac{3ac}{2a} - \frac{2ade}{2a} - \frac{f}{2a} + \frac{c}{2ad} = \frac{3c}{2} - de - \frac{f}{2a} + \frac{c}{2ad}$

z. B. $(a^2 - b^2) : (a - b) = a + b$

$$\begin{array}{l} a^2 - ab \\ \hline \quad ab - b^2 \\ \quad ab - b^2 \end{array}$$

z. B. $(3a^2b - 5ab^2 + 7bc) : -15abc = \frac{3a^2b}{15abc} + \frac{5ab^2}{15abc} - \frac{7bc}{15abc} = -\frac{a}{5c} + \frac{b}{3c} - \frac{7}{5a}$.

Sind Dividendum und Divisor complexe Größen, und geht Divisor im Dividendum nicht ganz auf, dann setzt man, bei einem Binom, den Divisor zum Dividendum als Nenner eines Bruches; z. B. $a + b : c + d = \frac{a+b}{c+d}$. Bei einem Polynom ordnet man die Größen, indem man untersucht, welche Größe in allen Gliedern vorwaltet, und setzt dann diejenigen Glieder, in welchen die meisten Factoren der Größen vorkommen, voran, (da bei der Division diejenige Größe oder Zahl gesucht werden soll, welche mit dem Divisor multiplicirt das Dividendum giebt); dann theilt man das höchste Glied des Dividendums durch das höchste des Divisors. Ist diese Größe schon der vollständige Quotient, und bildet man ihr Product mit dem Divisor, dann wird dasselbe, vom Dividendum subtrahirt, keinen Rest geben. — Bleibt ein Rest, dann findet man das nächste Glied des Quotienten, wenn man das höchste Glied des Restes durch das höchste des Divisors theilt. Diesen neuen Quotienten multiplicirt man wieder in den Divisor, und subtrahirt das Product vom ersten Reste. Bleibt kein neuer Rest, dann ist der Quotient vollständig; umgekehrt, setzt man die Operation fort, bis kein Rest mehr bleibt. Bleibt aber stets ein Rest, dann sucht man einen genäherten Quotienten, der um so genauer wird, je höher man die Reihe entwickelt.

z. B. $(aa + ab + 2ac - 2bb + 7bc - 3cc) : (a + 2b - c) = a - b + 3c$.

$$\begin{array}{l} aa + 2ab - ac \\ \hline \quad - ab - 2bb + 7bc \\ \quad - ab - 2bb + bc \\ \hline \qquad 3ac + 6bc - 3cc \\ \qquad 3ac + 6bc - 3cc \end{array}$$

Z. B. $(a^4 - 9a^2b^2 - 6abc^2 - c^4) : (a^2 - 3ab - c^2) = a^2 + 3ab + c^2.$

$$\begin{array}{l}
a^4 - 3a^3b \quad - \quad a^2c^2 \\
\hline
3a^3b - 9a^2b^2 - 6abc^2 \\
3a^3b - 9a^2b^2 - 3abc^2 \\
\hline
\qquad\qquad + a^2c^2 - 3abc^2 - c^4 \\
\qquad\qquad\quad a^2c^2 - 3abc^2 - c^4.
\end{array}$$

Z. B. $a \cdot \frac{1}{1-x} = a(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \frac{x^5}{1-x}$ ꝛc. $\frac{x^n}{1-x}$

oder $\frac{a}{1+x} = a - ax + ax^2 - ax^3 + ax^4 \ldots\ldots \frac{x^n}{1+x}$

oder $\frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 \ldots\ldots \frac{x^n}{1-x}$

oder $\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{(a-b)x}{b^2} + \frac{(a-b)x^2}{b^3} + \frac{(a-b)x^3}{b^4}$ ꝛc.

Die Division gründet sich also auf Multiplication; Division trennt, was Multiplication verband.

$a : b$ giebt einen Bruch $= a/b$; $(12 : 4 = 12/4)$; der Werth dieses Bruches sei $= c$, $(= 3)$, also $a : b = c$, mithin $bc = a$, $(4 \cdot 3 = 12)$. Multiplicirt man Zähler und Nenner mit gleicher Größe n $(= 6)$, dann wird der Werth des Bruches nicht geändert; also $nbc = na$, $(6 \cdot 4 \cdot 3 = 6 \cdot 12)$ oder $\frac{na}{b} = nc$, $(\frac{6 \cdot 12}{4} = 6 \cdot 3)$. Dividirt man wiederum na durch nb, dann ist der Quotient wiederum $= c$, $\frac{na}{nb} = c$, $(\frac{6 \cdot 12}{6 \cdot 4} = 3)$; also ist auch $\frac{na}{nb} = \frac{a}{b} = c$, $(\frac{6 \cdot 12}{6 \cdot 4} = \frac{12}{4} = 3)$. — Die Division mit gleicher Größe in Zähler und Nenner verkleinert den Bruch; soll $\frac{a}{b} = c$ durch m $(= 2)$ dividirt werden, dann ist $\frac{a}{m} = \frac{b}{m} \cdot c$, $(\frac{12}{2} = \frac{4}{2} \times 3 = 6)$, oder $\frac{a : m}{b : m} = c$, $(\frac{12 : 2}{4 : 2} = 6/2 = 3)$.

I. Soll ein Ganzes in einen Bruch dividirt werden, $n : \frac{a}{b}$, $(2 : \frac{20}{4})$, dann 1) dividirt man das Ganze in den Zähler, und läßt den Nenner unverändert; $\frac{a}{b} = c$ oder $a = bc$ $(20 =$

4 . 5), $a : n = bc : n$, oder $\frac{a : n}{b} = c : n$, ($20 : 2 = 4 \times 5 : 2$, oder $\frac{20 : 2}{4} = 5 : 2 = 2\frac{1}{2}$); z. B. $9 : {}^{18}/_{63} = {}^{2}/_{63}$; oder $15 : {}^{27}/_{35} = \frac{1^{12}/_{15}}{35} = {}^{27}/_{525}$ oder $\frac{1^{4}/_{5}}{35} = {}^{9}/_{175}$. Oder 2) man multiplicirt das Ganze mit dem Nenner, und läßt den Zähler unverändert, $a = nbc : n$ oder $\frac{a}{nb} = c : n$, oder $n : \frac{a}{b} = n \times \frac{b}{a} = \frac{bn}{a}$, [$20 = (2 . 4 . 5) : 2$, oder $\frac{20}{2 . 4} = 5 : 2 = 2\frac{1}{2}$] z. B. $9 : {}^{18}/_{63}$, $9 . 63 = 567$, ${}^{18}/_{567} = {}^{2}/_{63}$; oder $15 : {}^{27}/_{35}$, $15 . 35 = 525$, ${}^{27}/_{525} = {}^{9}/_{175}$.

II. Soll ein Bruch in ein Ganzes dividirt werden, $\frac{a}{b} : n$, ($\frac{20}{4} : 2$), dann multiplicirt man das Ganze mit dem Nenner, und dividirt durch den Zähler; $\frac{a}{b} = c : n$; $\frac{n}{c} = \frac{bn}{bc}$; $bc = a$, also $\frac{bn}{a}$, ($\frac{20}{4} = 5 : 2 = {}^{2}/_{5}$, $= \frac{4 . 2}{4 . 5}$, $4 . 5 = 20$ also $\frac{4 . 2}{20} = {}^{8}/_{20} = {}^{2}/_{5}$). (Ist das Ganze ein Factor vom Zähler, dann dividirt man damit in den Zähler, und dividirt den neuen Quotienten in den Nenner; z. B. ${}^{20}/_{4} : 2$; $2 : 20 = 10$; $4 : 10 = {}^{2}/_{5}$ | oder ${}^{12}/_{19} : 3$; $3 . 19 = 57$, $12 : 57 = 4^{3}/_{4}$.)

III. Soll ein Bruch in einen Bruch dividirt werden, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, dann 1) dividirt man Zähler in Zähler und Nenner in Nenner; also $\frac{ad}{bc} = \frac{a}{bc : d} = \frac{ad : c}{b} = \frac{a : c}{b : d}$; (z. B. ${}^{3}/_{5} : {}^{9}/_{15}$; $\frac{3 . 15}{5 . 9} = \frac{3}{5 . 9 : 15} = \frac{3 . 15 : 9}{5} = {}^{45}/_{45} = {}^{3}/_{3} = {}^{5}/_{5} = 1$; oder ${}^{7}/_{19} : {}^{5}/_{17}$; $\frac{{}^{5}/_{7}}{{}^{17}/_{19}} = \frac{5 . 19}{7 . 17} = {}^{95}/_{119}$. Oder

2) man kehrt den Divisor um, und multiplicirt Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner; das Product des Nenners giebt dann den Nenner des neuen Bruches; $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{b}{a} : \frac{c}{d} =$

$\frac{bc}{ad}$. Z. B. $\frac{9}{5} : \frac{9}{15}$; $\frac{5}{3} : \frac{9}{15} = \frac{9 . 5}{3 . 15} = \frac{45}{45} = 1$ | $\frac{7}{19}$: $\frac{5}{17}$; $\frac{19}{7} : \frac{5}{17} = \frac{5 . 19}{7 . 17} = \frac{95}{119}$; ebenso $\frac{20}{4} : \frac{5}{8}$; $\frac{4}{20} : \frac{5}{8} = \frac{20}{160} = \frac{1}{8}$; ebenso wie $\frac{20}{4} = 5 : \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$.

V. Potenzirung und Radication.

Wird ein Grundfactor oder Dignand mit dem Exponenten multiplicirt, dann heißt das Product eine Potenz.

Ist Coëfficient und Größe mit angehängten Exponenten freistehend, dann bezieht sich der Exponent nur auf die Größe, z. B. $5 a^2 = 5 . a . a$ (ist $a = 3$, dann $5 . 3 . 3 = 45$); ist aber Coëfficient und Größe in einer ( ) eingeschlossen, und der Exponent steht außerhalb der ( ), dann bezieht sich dieser auf den Coëfficienten; z. B. $(5 a)^2 = 5^2 = 25 = 25 a$; (ist $a = 3$, dann $5 . 3 = 15^2 = 325$).

1) $a^m . a = a^{m+1}$; $a^m . a^2 = a^{m+1} . a = a^{m+2}$ also: I, $a^m . a^n = a^{m+n}$.

2) $a^m : a = a^{m-1}$; $a^{m-1} : a = a^{m-2}$ also II, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

3) $m = n$, also $\frac{a^n}{a^n} = 1 = a^{n-n}$ also III, $a^0 = 1$.

4) $n = m + p$; mithin $a^m : a^{m+p} = a^{m-m-p} = a^{0-p} = a^{-p} = a^0 : a^p$; also IV, $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ und $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$.

Ebenso mit negativen Exponenten:

5) $a^m . a^{-n} = a^m . \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $a^{-m} . a^{-n} = \frac{1}{a^m} . \frac{1}{a^n}$ also V, $a^{-(m+n)} = a^{-m-n}$.

6) $a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m . a^n = a^{m+n}$; $a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m}$ also VI, $a^{n-m} = a^{-m+n}$.

Verschiedene Grundfactoren mit gleichen Exponenten:

7) $a^m \cdot b^m = (ab)^m$; $\frac{a^m}{b^m} = \frac{aaa\ldots}{bbb\ldots}$ also VII, $(\frac{a}{b})^m$.

Mit steigendem Exponenten wird die Potenz eines ächten Bruches beständig kleiner; eines unächten aber, wenn er größer als 1 ist, beständig größer. $(\frac{1+b}{1})^n = \frac{1^n}{(1+b)^n} = \frac{1^n}{(1+b)^n}$; und $(1+b)^n > 1+nb$.

Verschiedene Grundfactoren und verschiedene Exponenten bleiben unverändert: $a^m \cdot b^n = \frac{a^m}{b^n}$.

Eine Potenz nochmals potenzirt:

8) $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{n \cdot m}$ also VIII, $(a^n)^m$. Ebenso $[(a^m)^n]^{-p} = a^{-m \cdot n \cdot p}$.

Umgekehrt:

9) $a^{\frac{mn}{n}}$ also IX, a^m. Ebenso $a^{\frac{p}{n}}$ = einer Zahl, welche zur nten Potenz erhoben a^p giebt. Also $a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{q}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^p \cdot (a^{\frac{1}{m}})^q$ also X, $(a^{\frac{1}{m}})^{p+q} = a^{\frac{p+q}{m}}$; folglich $a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{pn+qm}{mn}}$.

10) $a^{\frac{p}{m}} : a^{\frac{q}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^p : (a^{\frac{1}{m}})^q$ also XI, $(a^{\frac{1}{m}})^{p-q} = a^{\frac{p-q}{m}}$; folglich $a^{\frac{p}{m}} : a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{pn-qm}{mn}}$.

Die *Radication* ist das Umgekehrte der Potenzirung. Aus der Potenz oder dem *Radicand nebst dem Exponenten* soll die *Wurzel*, der Dignand, *gezogen* werden. $\sqrt[n]{b} = a$, d. h. die *nte* $\sqrt{}$ aus $b = a$. Ist der Exponent $= 1$, dann ist $\sqrt[1]{a} = a$; ist der Exponent $= 2$, dann $\sqrt{b} = a$; ist er $= 3$, dann $\sqrt[3]{b} = a$ u. s. f.

$\sqrt[n]{a^p}$ und $(\sqrt[n]{a^p})^n = a^p$; $\sqrt[n]{a^p}$ ist eine Größe, welche zur nten Potenz erhoben a^p giebt.

Multiplicirt und dividirt man den Wurzelexponenten und den Exponenten unter dem Wurzelzeichen durch gleiche Zahl dann erhält man: $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{pq}}$ und $\sqrt[n:q]{a^{p:q}}$; ebenso $\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^{p+q}}$ und beide dividirt $= \sqrt[n]{a^{p-q}}$ | $\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[m]{a^q} = \sqrt[mn]{a^{mp+nq}}$ und dividirt $= \sqrt[mn]{a^{mp-nq}}$. Bei verschiedenen

Radicanden hat man: $\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^p} = \sqrt[n]{(ab)^p} = (\sqrt[n]{ab})^p$, und $\sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^p} = (\sqrt[m]{a}\,\sqrt[n]{b})^p$; und dividirt: $\sqrt[m]{a^p} : \sqrt[n]{b^p}$ $= \left(\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^p$.

Verschiedene Radicanden und verschiedene Dignanden bleiben unverändert: z. B. $\sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^q}$ und $\sqrt[m]{a^p} : \sqrt[n]{b^q}$.

Die Multiplication der Potenzialgrößen mit gleichen Dignanden (— oder + Exponenten) geschieht durch Addition der Exponenten; die Division durch Subtraction des Exponenten im Divisor von dem im Dividend; die Potenzirung geschieht durch Multiplication, und die Radication durch Division der Exponenten.

Potenzial- und Wurzelgrößen können im Allgemeinen nur mit ihren Coëfficienten den Calcül-Operationen unterworfen werden. — Bei gleichen Exponenten und gleichen Zeichen wird nur mit den Coëfficienten operirt, und diesen der gemeinschaftliche Buchstabe und das entsprechende Zeichen gegeben. Verschiedene Größen (an sich, und durch die Exponenten) werden nur durch das richtige Zeichen verbunden, nachdem ihre Coëfficienten der geforderten Operation unterworfen wurden.

Soll ein **Product** auf eine Potenz erhoben werden, dann kann man die einzelnen Factoren desselben erheben. Z. B. $(ab)^3 = a^3 b^3$, und $(ab)^{-3} = a^{-3} b^{-3} = \dfrac{1}{a^3 b^3}$.

Soll ein **Bruch** auf eine Potenz erhoben werden, dann erhebt man Zähler und Nenner gleichmäßig, z. B. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3 = \dfrac{a^3}{b^3}$ und $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-3} = \dfrac{a^{-3}}{b^{-3}} = a^{-3} b^{3} = \dfrac{b^3}{a^3}$.

Complexe Größen mit Potenzen werden, wenn sie **addirt** und **subtrahirt** werden sollen, zuvor geordnet:

z. B.

	Geordnet und addirt:
$3a^{-2} + b^2c + 5a^4b - 7ab$	$5a^4b + 3a^{-2}b^2c - 7ab$
$-6a^4b + 2a^{-2}b^2c + 9a^4b$	$-6a^4b + 2a^{-2}b^2c + 17ab$
$17ab - 8a^{-2}b^2c - 10ab$	$9a^4b - 8a^{-2}b^2c - 10ab$
	$8a^4b - 3a^{-2}b^2c \ldots$

Zu Subtrahiren:

$$\begin{array}{rl} & 9a^m x^2 - 13 + 20ab^3x - 4b^m c x^2 \\ -) & 3b^m c x^2 + 9a^m x^2 - 6 + 3ab^3x \\ \hline & 17ab^3x - 7b^m c x^2 - 7 \end{array}$$

Zu Multipliciren:

$$\begin{array}{r} (a^2 + ax + x^2) \\ \times\ (a^2 - ax + x^2) \\ \hline a^2x^2 + ax^3 + x^4 \\ - a^3x - a^2x^2 - ax^3 \quad \\ a^4 + a^3x + a^2x^2 \qquad\quad \\ \hline a^4 \ldots + a^2x^2 \ldots + x^4 \end{array}$$

Z. B.

$$\begin{array}{r} (a^m - 3b^q + d^n) \\ \times\ (-4a^m - 3b^q) \\ \hline - 3a^mb^q + 9b^{2q} - 3b^qd^n \\ -4a^{2m} + 12a^mb^q - 4a^md^n \qquad\qquad \\ \hline -4a^{2m} + 9a^mb^q - 4a^md^n + 9b^{2q} - 3b^qd^n. \end{array}$$

Das Gesetz, nach welchem jede Potenz einer zweitheiligen Wurzel $(a + b)^n$ zu entwickeln ist, heißt: der Newtonsche binomische Lehrsatz; das der Potenzirung mehrtheiliger Wurzeln $(a + b + c \ldots)^n$ heißt der polynomische Lehrsatz.

Z. B.

$$\begin{array}{r} (a + b)^1 = (a + b) \\ \times\ (a + b) \\ \hline ab + b^2 \\ a^2 + ab \qquad \\ \hline (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ \times\ (a + b) \\ \hline a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ a^3 + 2a^2b + ab^2 \qquad \\ \hline (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \times\ (a + b) \\ \hline a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\ a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \qquad \\ \hline (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array}$$

u. s. f.

Z. B.

$$\begin{array}{l} (a + b + c) \\ \times\ (a + b + c) \\ \hline a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 = \\ \qquad a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2. \end{array}$$

Setzt man in dem Polynome $a + b + c + d \ldots + x$, das erste Glied a = a, und die Complexion $b + c + d \ldots + x = p$, dann entsteht $(a + b + c \ldots + x)^n = (a + p)^n =$

$$a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} p + \frac{(n-1)n}{1.2} a^{n-2} p^2 + \frac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3} \times a^{n-3} p^3 + \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{1.2.3.4} a^{n-4} p^4 + \ldots\ldots$$

Setzt man die Werthe von p, p^2, p^3, p^4 rc., dann hat man die Potenz des gegebenen Polynoms.

Z. B. $(a + b + c)^5$; $a = a$ und $p = (b + c)$.

$(a + p)^5 = a^5 + 5a^4 p + 10 a^3 p^2 + 10 a^2 p^3 + 5 a p^4 + p^5$.

$p = (b + c)$, $p^2 = b^2 + 2bc + c^2$; $p^3 = b^3 + 3b^2 c + 3bc^2 + c^3$; ......

$p^5 = b^5 + 5b^4 c + 10 b^3 c^2 + 10 b^2 c^3 + 5 b c^4 + c^5$.

Es ist demnach:

$$\begin{aligned}
a^5 &= a^5; \\
5a^4 p &= 5a^4 b + 5a^4 c; \\
10 a^3 p^2 &= 10 a^3 b^2 + 20 a^3 bc + 10 a^3 c^2; \\
10 a^2 p^3 &= 10 a^2 b^3 + 30 a^2 b^2 c + 30 a^2 b c^2 + 10 a^2 c^3; \\
5 a p^4 &= 5 a b^4 + 20 a b^3 c + 30 a b^2 c^2 + 20 abc^3 + 5 ac^3; \\
p^5 &= b^5 + 5 b^4 c + 10 b^3 c^2 + 10 b^2 c^3 + 5 b c^4 + c^5.
\end{aligned}$$

Mithin ist $(a + b + c)^5 = a^5 + 5a^4 b + 5a^4 c + 10 a^3 b^2 + 20 a^3 bc + 10 a^3 c^2 + 10 a^2 b^3 + 30 a^2 b^2 c + 30 a^2 b c^2 + 10 a^2 c^3 + 5 a b^4 + 20 a b^3 c + 30 a b^2 c^2 + 20 abc^3 + 5 ac^4 + b^5 + 5 b^4 c + 10 b^3 c^2 + 10 b^2 c^3 + 5 bc^4 + c^5$.

Die Division complexer Größen wird nach den obigen, bei »Division« angeführten Grundsätzen ausgeführt:

Z. B. $(a + x)^2 (a + y)^{-3} : (a + x)^{-4} (a + y)^{-7} =$

$$\frac{(a + x)^6 (a + y)^{-3}}{(a + y)^{-7}} = (a + x)^6 (a + y)^4.$$

Die Wurzel wird aus einer zusammengesetzten Buchstabengröße wie aus einer Zahlengröße gezogen:

Z. B. $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = (a + b)^2$

$$\begin{array}{l}
(a)^2 = a^2 \\
\qquad 2a \text{ in } 2ab \\
\qquad 2a \times b = 2ab \\
\hline
\qquad\qquad b^2 \\
\qquad (b)^2 = b^2
\end{array}$$

3. B. $\sqrt{(a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2)} = (a+b+c)$.

$$
\begin{array}{l}
(a)^2 = a^2 \\
\hline
2a \quad \text{in} \quad 2ab \\
2a \times b = 2ab \\
\hline
\qquad\qquad b^2 \\
\qquad (b)^2 = b^2 \\
\hline
2(a+b) = 2a + 2b \text{ in } 2ac + 2bc \\
\qquad (2a+2b) \times c = 2ac + 2bc \\
\hline
\qquad\qquad\qquad + c^2 \\
\qquad\qquad (c)^2 = + c^2
\end{array}
$$

Ebenso $\sqrt[3]{(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)} = (a+b)$ u. s. w.

Sind complexe Wurzelgrößen zu addiren oder zu subtrahiren, dann werden die gleichnamigen Wurzelgrößen unter einander gesetzt:

3. B. Addition:

$$
\begin{array}{l}
13\sqrt[5]{12a^2bc} + 17\sqrt[m]{3} - 5\sqrt[n]{6} \\
7\sqrt[5]{12a^2bc} + 3\sqrt[m]{3} + 2\sqrt[n]{6} - 2a\sqrt{c} + \tfrac{1}{2}\sqrt[7]{9a} \\
-20\sqrt[5]{12a^2bc} \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots \sqrt{c} - 3\sqrt[7]{9a} \\
+ 9\sqrt[5]{12a^2bc} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\hline
+ 9\sqrt[5]{12a^2bc} + 20\sqrt[m]{3} - 3\sqrt[n]{6} - (2a-1)\sqrt{c} - 2\tfrac{1}{2}\sqrt[7]{9a}.
\end{array}
$$

3. B. Subtraction:

$$
\begin{array}{l}
16\sqrt[4]{6ab} - \sqrt[5]{9c^3} + 3\sqrt[m]{7a} - \sqrt{10} \\
-)\ 3\sqrt[4]{6ab} + 8\sqrt[5]{9c^3} + 5\sqrt[m]{7a} \ldots\ldots - 2\sqrt[4]{10} \\
\hline
13\sqrt[4]{6ab} + 7\sqrt[5]{9c^3} + 8\sqrt[m]{7a} - \sqrt{10} - 2\sqrt[4]{10}.
\end{array}
$$

3. B. Multiplication:

3. B. $(3+\sqrt{5}) \times (2-\sqrt{5})$

$$
\begin{array}{l}
-3\sqrt{5} - 5 \\
6 + 2\sqrt{5} \\
\hline
1 - \sqrt{5}
\end{array}
$$

3. B. $(\sqrt{7} - \sqrt{3})$

$$
\begin{array}{r}
\times (\sqrt{5} - \sqrt{2}) \\
\hline
-\sqrt{14} + \sqrt{6} \\
\sqrt{35} - \sqrt{15} \qquad\quad \\
\hline
\sqrt{35} - \sqrt{15} - \sqrt{14} + \sqrt{6}.
\end{array}
$$

3. B. $\sqrt[12]{\frac{a}{bc}} \times \sqrt[8]{\frac{a^m}{b}} = \sqrt[24]{\frac{a^2}{b^2c^2}} \times \sqrt[24]{\frac{a^{3m}}{b^3}} = \sqrt[24]{\frac{a^{3m+2}}{b^5c^2}}$.

3. B. Division:

$(\sqrt{72} + \sqrt{32} - 4) : \sqrt{8} = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} + \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{16}}{8} = \sqrt{9} + \sqrt{4} - \sqrt{2} = 5 - \sqrt{2}$.

Z. B. $c \sqrt{} (a^2 - x^2 : \sqrt{} (a + x) = \frac{c \sqrt{} (a - x)(a + x)}{\sqrt{} (a + x)}$
$= c \sqrt{} (a - x)$.

XI. Algebra,

die Lehre von den Gleichungen.

Die gemeine Arithmetik vermag nur dann unbekannte Größen durch bekannte zu finden, wenn man von den bekannten zu den unbekannten gelangen kann; dieser Weg ist oft weitläufig, zuweilen unmöglich; hier beginnt das Gebiet der Algebra. Sie lehrt: unbekannte Größen aus bekannten Eigenschaften derselben, oder aus den Verhältnissen der unbekannten zu den bekannten, zu finden. Die Algebra schließt also von den unbekannten Größen auf die bekannten, die Arithmetik von den bekannten auf die unbekannten Größen. — Die bekannten Größen werden durch a, b, c, d, e, f u. s. f., die unbekannten durch x, y, z, v, w bezeichnet. — Da bei vielen Größen nur eine fehlende unbekannte gesucht wird, und die gegebenen bekannten Elemente, verschiedenem Calcül unterworfen, Haltungspunkte darbieten, aus welchen auf die unbekannte geschlossen werden kann, sind die meisten dieser Aufgaben (ersten Grades mit einer Unbekannten), auch auf arithmetischem Wege zu lösen. Z. B. Zwei Zahlen werden gesucht, deren Differenz = 6, die Summe = 24 ist. Arithmetisch calculiren wir: Wären beide Summen gleich, dann wären beide Zahlen = 12; nun ist aber die eine um 6 größer; der einen muß also so viel zugesetzt werden, als der andern abgezogen wird, um = Summe zu schaffen; beide sind also um das Doppelte des Hinzugefügten verschieden; 12 + 6 und 12 — 6 = 18 und 6; die Hälfte des Unterschiedes muß also der einen zugesetzt, der andern abgenommen werden; 6 : 2 = 3; 12 — 3 und 12 + 3 = 9 und 15. Algebraisch lösen wir: Die kleinere Unbekannte sei = x, dann ist die größere x + 6; die Summe beider ist x x + 6 = der Summe 24; also 2 x + 6 = 24. Gleiches von Gleichem abgezogen, giebt gleiche Reste; also 2 x — 6 = 24 — 6; demnach 2 x = 18, also x = 9, ist die kleinere Zahl; die größere ist = der kleineren + der Differenz, also 9 + 6 = 15.

In **Buchstaben** (literaler Bezeichnung) ausgedrückt: Die Differenz von x sei $= a$, die Summe $= b$; also $2x + a = b$; von beiden Seiten a gezogen, $2x - a = b - a$, giebt $2x = b - a$; also $x + a = \frac{b - a}{2} + a = \frac{b - a}{2} + \frac{2a}{2} = \frac{b + a}{2} = \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} a$ für die größere; ꝛc.

Wird z. B. eine Zahl gesucht, welche mit 5 multiplicirt, zum Produkte 19 addirt, davon 5 abgezogen, der Rest durch 7 dividirt, zum Quotienten 51 addirt, davon 13 abgezogen und der Rest durch 5 dividirt, die Zahl 9 giebt; dann kann man **arithmetisch** die Operationen von hinten umgekehrt durchführen. $a \times 5 + 19 - 5 : 7 + 51 - 13 : 5 = 9$, umgekehrt $9 \times 5 + 13 - 51 \times 7 + 5 - 19 : 5 = 7$. **Algebraisch** löset man: $5x + 19 - 5 = 5x + 14$; $: 7 = \frac{5}{7} x + 2$, $+ 51 = \frac{5}{7} x + 53$, $- 13 = \frac{5}{7} x + 40$; $: 5 = \frac{1}{7} x + 8 = 9$; also

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{7} x + 8 = 9 & \text{oder } \frac{1}{7} x = 9 - 8. \\ -8 - 8 & \\ \hline 1 & \text{mithin } \frac{1}{7} x = 1 = 7. \end{array}$$

Z. B. $a \times 5 - 145 : 125 + 9 : 9 = 9$ giebt das Stiftungsjahr des Braunschw. Blinden-Institutes; **arithmetisch** gelöset: $9 \times 9 - 9 \times 125 + 145 : 5 = 1829$; **algebraisch**: $(5x - 145) : 125 = 1^{20}/_{125} = -1^{4}/_{25}$, $+ 9 = + 7^{21}/_{25}$, $: 9 = 19\ ^{6}/_{225}$; $^{5}/_{125} = {}^{1}/_{25}$, $: 9 = {}^{1}/_{225}$; also $^{1}/_{225}\, x + {}^{196}/_{225} = 9$; transponirt: $^{1}/_{225}\, x = 9 - {}^{196}/_{225}$; $225 - 196 = 29$; $8^{29}/_{225} = {}^{1}/_{225}\, x$; $8 \times 225 = 1800$; $29 \times 225 : 225 = 29$; also $1800 + 29 = 1829$.

Die Gleichheit oder Gleichsetzung zweier Größen (**Theile der Gleichung**) oder zweier Größen-Verknüpfungen (**Glieder der Gleichung**) heißt eine **Gleichung** im Allgemeinen. Eine oder mehrere unbekannte Größen werden umgeformt, mit bekannten verknüpft oder aus ihrer Verbindung mit bekannten getrennt, ausgedrückt, (**Auflösung der Gleichung**). Die Form der Gleichung wird so verändert, daß das Zeichen der gesuchten Größe auf der einen Seite, ihr Werth auf der andern Seite des Gleichheitszeichens zu stehen kommt. — Gleichungen, welche in beiden Theilen dieselben Größen nur in verschiedener Form enthalten, heißen **analytische** Gleichungen. Z. B. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. **Gleichungen**, welche in Form und Werth einander gleich sind, heißen **identische** Gleichungen; z. B. $12\,x + 24\,y = 60$, und $16\,x + 32\,y = 80$; hier ist $x = 5 - 2$ in beiden, also $y = y$, der Werth von y also unbestimmbar; man stößt auf diese Gleichungen, wenn mehrere von einander abhängende Gleichungen einem gemeinsamen Calcül unterworfen werden. Ebenso z. B. $(a^3 + x^3) : (a - x) = a^2 + a\,x + x^2$; dividirt man, dann entsteht $a^2 + a\,x + x^2 = a^2 + a\,x + x^2$.

Algebraische Gleichungen sind diejenigen, in welchen beide durch Gleichheitszeichen verbundene Theile wesentlich von einander verschiedene, nicht unmittelbar von einander abzuleitende (wenn gleich von einander abhängende) Größen-Verknüpfungen enthalten; z. B. $a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x = d$.

Ist nur **eine** unbekannte Größe zu verknüpfen, dann heißt die Gleichung eine **einfache, bestimmte**; z. B. $4\,x + 3 = 15$; $x = \frac{15 - 3}{4} = \frac{12}{4} = 3$. Sind **mehrere** unbekannte zugegen, dann heißt sie eine **verwickelte, unbestimmte**; die Lösung der einzelnen Unbekannten fordert ebensoviele algebraische Gleichungen; lassen sich nicht entsprechende Gleichungen bilden, dann bleibt die Aufgabe unbestimmt, und in einer solchen **diophantischen** Gleichung finden sich für die unbestimmt gebliebene Unbekannte verschiedene Werthe; z. B. Eine Zahl durch 8 dividirt, giebt den Rest 5; $\frac{x - 5}{8} = y$, oder $x = 8\,y + 5$; x kann 21, 29, 197 u. s. f. sein. Z. B. A. kauft 124 Stück Vieh, Schweine, Ziegen und Schafe, für 400 ₰; ein Schwein kostet $4\frac{1}{2}$ ₰, eine Ziege $3\frac{1}{6}$ ₰ und ein Schaf $1\frac{1}{4}$ ₰; wie viel Stück von jeder Gattung kaufte A.? Dies können 17 Schweine, 99 Ziegen und 8 Schafe, oder 40 Schweine, 60 Ziegen und 24 Schafe, oder 63, 21 und 40 sein. —

Erscheint die Unbekannte in der **ersten Potenz**, dann ist die Gleichung vom **ersten Grade** $= x^1$; eine Exponentialgleichung heißt eine **quadratische**, wenn sie x^2 enthält; eine **cubische** $= x^3$, eine **biquadratische** $= x^4$ u. s. f. Die Summe der Exponenten in demjenigen Gliede, in welchem diese Summe am größesten ist, bestimmt den Grad der Gleichung. Z. B. $a^2\,x + b = c^3\,x - d$ ist eigentlich nur vom ersten Grade, obgleich die bekannten Coëfficienten a und c in höheren Potenzen vorkommen; $5x + xy = 4x + 3$ ist vom zweiten Grade, weil im ersten Gliede die Summe der Exponenten von x und y zwei ist, und diese Summe in keinem Gliede zwei übersteigt; $x^2 y^3 + 5xy^2 = x^2 - 7$ ist vom 5ten Grade, denn $x^2 y^3$ = Exponent 5. — Eine logarithmische Gleichung läßt sich nur mit Hülfe der Logarithmen auflösen; die gesuchte Größe kommt hier nur in denjenigen Zahlformen vor, deren Log. gefordert werden.

Jede analytische Aufgabe muß zunächst in die richtige Gleichung gebracht (Aufsatz der Glg.), und dann gelöset werden. Z. B. Es wird eine Zahl gesucht, welche, wenn man von ihrem 5fachen 7 abzieht, eben so groß ist, als wenn man zu ihrem 3fachen 12 addirt: x sei die gesuchte Zahl, $x \times 5 = 5x$, davon 7, $5x - 7$; $x \times 3 + 12$, $3x + 12$; also Aufsatz:

$5x - 7 = 3x + 12$; transponirt: $5x - 3x = 12 + 7$; $2x = 19$; also $x = 9\frac{1}{2}$; ($9\frac{1}{2} \times 5 - 7 = 40$, $9\frac{1}{2} \times 3 + 12 = 40$.)

Die vier arithmetischen Grundoperationen heben einander gegenseitig auf, $+$ durch $-$, $-$ durch $+$; $\times$ durch $:$, $:$ durch $\times$. Gleiche Operationen mit gleichen Größen vorgenommen, bringen Gleiches hervor; ebenso geben gleiche Potenzen auch gleiche Wurzeln, bei richtigen Vorzeichen; Ungleiches mit Gleichem $+$, $-$, $\times$ und $:$, giebt Ungleiches; ebenso geben ungleiche Potenzen auch ungleiche Wurzeln. Die minus Größen addirt man auf beiden Seiten der Gleichung, wodurch sie auf der entgegengesetzten Seite $+$ werden; z. B. $ax^2 + bx = -cx + d$; $+cx = +cx$, also $ax^2 + bx + cx = d$, oder $ax^2 + (b + c)x = d$. Die plus Größen subtrahirt man auf beiden Seiten der Gleichung, wodurch sie auf der entgegengesetzten $-$ werden; z. B. $ax^2 = bx + d$; $-bx = -bx$; also $ax^2 - bx = d$. Man schafft also jedes beliebige Glied der Gleichung von einer Seite derselben fort, und giebt dem transponirten Gliede das entgegengesetzte Zeichen; z. B. $x^2 + c^2 - 2cy + y^2 = a^2$; transponirt: $x^2 = a^2 + 2cy - c^2 - y^2$. Gleiche Glieder mit gleichen Vorzeichen in beiden Theilen der Gleichung heben einander auf; z. B. $ax + by - 6 = cy + by$, ist $ax - 6 = cy$.

Die einfachsten Formen der Gleichungen sind:

1) $x + 5 = 9$; $x = 9 - 5$ $(= 4)$ | $x + a = b$; $x = b - a$.

2) $x - 5 = 9$; $x = 9 + 5$ $(= 14)$ | $x - a = b$; $x = b + a$.

3) $14 - x = 9$; $14 = 9 + x$; $14 - 9 = x$ $(= 5)$ | $a - x = b$; $a = b + x$; $a - b = x$.

4) $6x = 30$; $x = 30 : 6$ $(= 5)$ | $ax = b$; $x = b : a$.

5) $x : 6 = 5$; $x = 6 \times 5$ $(= 30)$ | $x : a = b$; $x = a \times b$.

6) $30 : x = 5$; $30 = 5x$; $30 : 5 = x$ $(= 6)$ | $a : x = b$; $a = b \times x$; $a : b = x$.

Die vier Grundoperationen bei Gleichungen angewendet, s. o. Buchstabenrechnung.

Z. B.
$$\begin{array}{lr} x + 5 - 2 = 9 & \text{addirt} \\ -5 + 2 = & -5 + 2 \\ \hline x & = 9 - 5 + 2 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} x + a - b = r & \text{addirt} \\ -a + b = & -a + b \\ \hline x & = r - a + b \end{array}$$

Z. B.
$$\begin{array}{lr} x + 5 - 2 = 9 & \text{subtrahirt} \\ 5 - 2 = & 5 - 2 \\ \hline x & = 9 - 5 + 2 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} x + a - b = r & \text{subtrahirt} \\ a - b = & a - b \\ \hline x & = r - a + b. \end{array}$$

Will man ein Glied von einem Factor befreien, dann dividirt man beide Seiten durch diesen Factor; und will man einen Divisor fortschaffen, dann multiplicirt man beide Seiten der Gleichung mit dem fortzuschaffenden Divisor; z. B. $\frac{x}{5} - n = 8$; $x - 5n = 40$; ebenso $\frac{n + bx}{e - x} = r - 2x$; durch Multiplication mit $(e - x)$ entsteht $n + bx = r(e - x) - 2x(e - x)$, oder $n + bx = er - rx - 2ex + 2xx$. So entsteht aus $4x + \frac{a}{m} = 20b - c$, durch 4 dividirt $x + \frac{a}{4m} = 5b - \frac{c}{4}$; und aus $20(x - 4) + 35 = \frac{5x}{6} + 185$, durch 5 dividirt $4(x - 4) + 7 = \frac{x}{6} + 37$ u. s. w.

Alle algebraische Gleichungen mit einer Unbekannten lassen sich, wenn a, b, c ... A, + oder − Zahlen sind, und n eine ganze + Zahl bedeutet, auf die allgemeine Form $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots px^2 + qx = A$ bringen. Z. B. $\frac{a}{x} - \frac{a - b}{c - x} = bx - \frac{d}{3x}$; man schaffe (die Größenverhältnisse berücksichtigend) durch Multiplication mit dem gemeinschaftlichen Nenner $3x(c - x)$ die Brüche fort; also $3a(c - x) - 3x(a - b) = 3bx^2(c - x) - d(c - x)$;

man löse nun alle Klammern, welche x enthalten; also $3ac - 3ax - 3x(a - b) = 3bcx^2 - 3bx^3 - cd + dx$; und transponire nun (durch successive Subtraction auf beiden Seiten des = Zeichens) die Glieder, welche x enthalten auf die eine, die Glieder ohne x auf die andere Seite, mit Aenderung der Zeichen; also $3bx^3 - 3bcx^2 - 3ax - 3(a - b)x - dx = -3ac - cd$, oder $3bx^3 - 3bcx^2 - (6a - 3b + d)x = -(3a + d)c$.

Ist z. B. die Gleichung $\frac{a - bx}{x} - \frac{d}{c} = a - \frac{b - cx}{nx}$ gegeben, dann löset man $(a - bx)cn - dnx = acnx - (b - cx)c$; daraus $acn - bcnx - dnx = acnx - bc + c^2x$; transponirt, $acnx + bcnx + c^2x + dnx = acn + b$, oder $(acn + bcn + c^2 + dn)x = acn + bc$. Wird diese Gleichung durch den Coëfficienten von x dividirt, dann entsteht $x = \frac{acn + bc}{acn + bcn + c^2 + dn} = \frac{(an + b)c}{(ac + bc + d)n + c^2}$.

Kommt x aber mit $\sqrt{}\sqrt{}$ vor, dann werden diese durch Potenzirung getilgt; z. B. $(\sqrt{a - x}) = (\sqrt[4]{x^2 - 5ax + b^2})$, zur 4ten Potenz erhoben, entsteht $(a - x)^2 = x^2 - 5ax + b^2$, und daraus $x = \frac{b^2 - a^2}{3a}$.

I, A. Die einfachsten Gleichungen vom *ersten* Grade mit *einer* Unbekannten haben im linken Theile unbekannte Glieder, im rechten ein bekanntes. Z. B. 91 (a) soll in 3 Theile zerlegt werden, so daß der 2te Theil 5mal (m) und der 3te Theil 7mal (n) so groß ist, als der erste Theil (x). Aus x soll gebildet werden, also $x + 5x + 7x = 91$; die darin unbekannten Glieder sind $1x + 5x + 7x = 13x = 91$. Dividirt man nun beide Theile der Gleichung durch den Coëfficienten von $x = 13$, so erhält man $x = 91/13 = 7$; der erste verlangte Theil ist also 7; der 2te $5 \times 7 = 35$, und der dritte $7 \times 7 = 49$; $(7 + 35 + 49 = 91)$. In Formel ausgedrückt

$$\frac{a}{1 + m + n},\ \frac{ma}{1 + m + n},\ \frac{na}{1 + m + n}.$$

Es soll z. B. die Zahl 570 in 4 Theile zerlegt werden, so daß der erste 5mal so groß als der 2te, der zweite 4mal so groß als der 3te, und der dritte 3mal so groß als der 4te ist. Hier kann aus dem 4ten gebildet werden; er sei $= x$; der 3te ist dann $= 3\,x$, der zweite $= 4 \times 3\,x = 12\,x$; und der erste $= 5 \times 12\,x = 60\,x$; also $60\,x + 12\,x + 3\,x + x = 570$, oder $76\,x = 570$. Mithin $x = 570 : 76 = 7^1/_2$; der dritte $= 3 \times 7^1/_2 = 22^1/_2$; der zweite $= 4 \times 22^1/_2 = 90$, und der erste $5 \times 90 = 450$; (Summa $7^1/_2 + 22^1/_2 + 90 + 450 = 570$.) — Oder: es soll die Zahl 360 in 5 Theile getheilt werden, so daß der zweite (b) 5mal so groß als der erste (x), der dritte (c) 2mal so groß als b, der vierte (d) 3mal so groß als c und 2mal so groß als x, und der fünfte (e) $^1/_2$mal so groß als $x + b + c + d$ sei. $x + 5 + 10 + 30 + 2\,x = 48\,x$; $(48 : 2 = 24 = e)$; $24 + 48 = 72\,x$; $(5 \,.\, 72 = 360 =$ der zu theilenden Zahl); $72 : 360 = 5 = x$; $5 \,.\, 5 = 25 = b$; $2 \,.\, 25 = 50 = c$; $3 \,.\, 50 + 2 \,.\, 5 = 160 = d$; $x + b + c + d = 240 : 2 = 120$; $240 + 120 = 360$.

Ebenso soll $1942^1/_2$ in 5 Theile zerlegt werden, so daß der zweite (b) 7mal so groß, als der erste (x), der dritte (c) 5mal so groß als b, der vierte (d) 4mal so groß als c und 2mal so groß als x, und der fünfte (e) $^1/_2$mal so groß als $x + b + c + d$ sei. $x + 7\,x + 35\,x + 140\,x + 2\,x = 185\,x$; $(: 2 = 95^1/_2)$; $185 + 92^1/_2 = 277^1/_2$; $(\times 7 = 1942^1/_2)$; $277^1/_2 : 1942^1/_2 = 7 = x$; $7 \,.\, x = 49 = b$; $5 \,.\, 49 = 245 = c$; $4 \,.\, 245 + 2 \,.\, 7 = 994 = d$; $x + b + c + d = 1295 : 2 = 647^1/_2 = e$; $1295 + 647^1/_2 = 1942^1/_2$.

Kommen gebrochene Glieder vor, dann multiplicirt man sämmtliche Glieder mit dem Hauptnenner (d. h. mit einer Zahl, welche durch alle Nenner theilbar ist); reducirt nun sämmtliche Glieder auf ein einziges, und dividirt die bekannte Zahl durch den Coëfficienten der unbekannten. Z. B. Eine Zahl wird gesucht, welche, wenn man $^2/_3$ und $^3/_4$ derselben addirt, und dann $^4/_5$ der Zahl von der Summe abzieht, $= 148$ ist. Die Unbekannte sei x; also $\frac{2\,x}{3} + \frac{3\,x}{4} - \frac{4\,x}{5} = 148$; $3 \,.\, 4 \,.\, 5 = 60$; $2 \,.\, 60 = \frac{120}{3} = 40\,x$; $3 \,.\, 60 = \frac{180}{4} = 45\,x$ und $4 \,.\, 60 = \frac{240}{5} = 48\,x$; mithin $40\,x + 45\,x - 48\,x = 37\,x$; 148.

$60 = 8880$; also $x = \frac{8880}{37} = 240 : \frac{2}{3} = 160$; $: \frac{3}{4} = 180$; $: \frac{4}{5} = 192$; $160 + 180 = 340 - 192 = 148$.

Oder 568 soll in 3 solche Theile zerlegt werden, daß der erste $2\frac{1}{2}$mal so groß sei als der zweite, und der zweite $3\frac{1}{3}$mal so groß als der dritte. Der dritte sei x; dann ist der zweite $2\frac{1}{2} \times x = \frac{5}{2} \times x = \frac{5\,x}{2}$, und der erste $= 3\frac{1}{3} \times x = \frac{10}{3} \times \frac{5\,x}{2} = \frac{50\,x}{6}$. Die Gleichung ist also $x + \frac{5\,x}{2} + \frac{50\,x}{6} = 568$; multiplicirt man die Gleichung mit dem Hauptnenner $2 \,.\, 3 = 6$, dann entsteht $6\,x + 15\,x + 50\,x = 71\,x$; $6 \,.\, 568 = 3408$; also $x = 3408 : 71 = 48$; der zweite Theil ist $\frac{5}{2} \times 48 = (5 \,.\, 48 : 2 =)\ 120$; und der erste $3\frac{1}{3} \,.\, 120 = (3 \,.\, 120 + (120 : 3 =)\ 400$; oder $568 : 71 = 8$; also $\frac{1}{6} = 8$, mithin $6 \,.\, 8 = 48$; $15 \,.\, 8 = 120$; $50 \,.\, 8 = 400$; $400 + 120 + 48 = 568$.

Kommen in beiden Theilen der Gleichung bekannte und unbekannte Glieder vor, dann muß man zunächst alle unbekannten in den einen, alle bekannten in den andern Theil der Gleichung, mit dem entgegengesetzten Zeichen (+ in —, $\times$ in :, und umgekehrt) transponiren. Z. B. Jemand will $\frac{3}{4}$ Centner einer Waare kaufen; es fehlen ihm aber 3 ℛ︀; er kauft nur $\frac{4}{7}$ Centner, und es bleiben ihm 2 ℛ︀ übrig; wie viel Thaler kostet 1 Ctr.? und wie viel Geld hatte der Käufer bei sich? — Der Preis des Ctrs. sei $= x$ ℛ︀, dann kosten $\frac{3}{4}$ Ctr. $3\,x : 4$; die Baarschaft des Käufers ist $= 3\,x : 4 - 3$; ferner kosten $\frac{4}{7}$ Ctr. $4\,x : 7$; da der Käufer 2 ℛ︀ übrig behielt, muß er $4\,x : 7 + 2$ ℛ︀ gehabt haben; also $\frac{3\,x}{4} - 3 = \frac{4\,x}{7} + 2$. Transponirt man -3 in den rechten Theil mit +, und $4\,x : 7$ in den linken mit —, dann wird die Gleichung $\frac{3\,x}{4} - \frac{4\,x}{7} = 3 + 2$; multiplicirt man nun alle Glieder mit dem Hauptnenner $4 \,.\, 7 = 28$, und dividirt dann (also $3 \,.\, 28 : 4 = 21$; $4 \,.\, 28 : 7 = 16$; $5 \,.\, 28 = 140$), dann wird die Gleichung $21\,x - 16\,x = 140$, oder $5\,x = 140$ und $x = 28$. Es ist daher $3\,x : 4 = 21$ und $3\,x : 4 - 3 = 18$; folglich hat 1 Centner 28 ℛ︀ gekostet, und der Käufer hatte 18 ℛ︀ bei sich. — Dividirt man alle Glieder in den Hauptnenner, und multiplicirt dann ($4 \,.\, 7 = 28$; $4 : 28 = 7, \,.\, 3 = 21$; $7 : 28 = 4, \,.\, 4 = 16$; $5 \,.\, 28 = 140$), dann giebt es dasselbe Resultat.

Zur Uebung noch einige ansprechende Beispiele:

Es soll der Geburtstag Sr. Durchlaucht, unseres geliebten Herrn Herzogs Wilhelm von Braunschweig-Lüneburg-Oels, algebraisch gefunden werden.

Die Aufgabe ist: Der 5te Theil der Tage des Jahres (welches kein Schaltjahr ist) vom 1sten Januar bis zu dem Geburtstage $x + 1$ Tag, ist ebensoviel als $^3/_{13}$ des Restes der Tage $+ 3$.

$^1/_5 x + 1 = {}^3/_{13}$ Rest $+ 3$; $x - {}^1/_5 x = {}^4/_5 x$, also $^4/_5 x - 1$ ist der Rest; dieser dividirt durch $^3/_{13}$; $^4/_5 : {}^3/_{13}$ oder $^4/_5 : {}^{13}/_3 = {}^{12}/_{65}$; $^3/_{13} : -1 = -{}^3/_{13}$; 3 zuaddirt, giebt $-{}^3/_{13} + 3$; also $^1/_5 x + 1 = {}^{12}/_{65} - {}^3/_{13} + 3$; $^1/_5 x = {}^{13}/_{65} x$, mithin $^{13}/_{65} x + 1 = {}^{12}/_{65} x - {}^3/_{13} + 3$; $-{}^{12}/_{65} x$ und $^{13}/_{65} x$ addirt, um beide unbekannte Größen auf eine Seite zu schaffen, giebt $^1/_{65} x$; demnach $^1/_{65} x = -{}^3/_{13} + 3 - 1$; die andere Seite ebenfalls addirt, $+3$ und $-{}^3/_{13}$, giebt $2^{10}/_{13}$, dazu -1, giebt $1^{10}/_{13}$; also $^1/_{65} x = 1^{10}/_{13}$ Tag. Um x zu finden, werden beide Theile $\times 65$; $^1/_{65} x \times 65 = x$; $1^{10}/_{13} \times 65$ ($10 \,.\, 65 = 650 : 13 = 50$; $1 \times 65 = 65$; $50 + 65 =$) 115; also $x = 115$te Tag im Jahre, d. i. der 25ste April.

Es soll das Geburtsjahr Sr. Durchlaucht gefunden werden: Von $^2/_7$ der Jahreszahl x subtrahire man $^1/_6$ derselben; den Rest multiplicire man mit $3^3/_5$, addire 43 dazu; dann ist diese Summe gleich den addirten obigen Größen, $^2/_7 + {}^1/_6 x$.

$$^2/_7 x - {}^1/_6 x \times 3^3/_5 + 43 = {}^2/_7 + {}^1/_6 x.$$

$2 \,.\, 6 - 7 = 5$; $7 \,.\, 6 = 42$, also $^5/_{42}$; mithin $^2/_7 x - {}^1/_6 x = {}^5/_{42} x$, $\times 3^3/_5$ ($= {}^{18}/_5$) $= {}^{18}/_{42} x$, $+ 43$; also:

$^{18}/_{42} x + 43 = {}^2/_7 x + {}^1/_6 x$ oder $^3/_7 x + 43 = {}^2/_7 x + {}^1/_6 x$. $^2/_7 + {}^1/_6 = {}^{19}/_{42}$; also $^{19}/_{42} x = {}^{18}/_{42} x + 43$. Nun $^3/_7$ oder $^{18}/_{42} x$ auf beiden Seiten abgezogen, bleibt $^1/_{42} x = 43$; $42 \,.\, 43 = 1806$.

Das Jahr und der Tag, an welchem Se. Durchlaucht das Blinden-Institut mit einem huldreichen Besuche beglückte, soll algebraisch gefunden werden:

Wenn man die beiden ersten Ziffern der Jahreszahl, 18, wegstreicht, und addirt die Tage des Jahres, vom 1sten Januar bis incl. des x Tages, zu den restirenden zwei Ziffern der Jahreszahl, dann ist die Summe $= 50$; multiplicirt man die Tage mit 7, und die von der Jahreszahl restirenden 2 letzten Ziffern mit $3\frac{1}{2}$, dann ist das erste Product um 14 größer, als das zweite.

Die eine Zahl sei x, der andere Theil muß $50 - x$ sein; $7 \times x = 7x$; $(50 \times 3\frac{1}{2}) - (x \times 3\frac{1}{2}) = 175 - 3\frac{1}{2}x$; $7x$ ist um 14 größer als $175 - 3\frac{1}{2}x$; also die Gleichung

$7x - 14 = 175 - 3\frac{1}{2}x$; transponirt,

$7x + 3\frac{1}{2}x = 175 + 14$; oder $10\frac{1}{2}x = 189$; multiplicirt mit 2, um den Bruch fortzuschaffen, $21x = 378$; also $x = 18$, der 18te Januar. $50 - 18 = 32$, die weggestrichene 18 davorgesetzt $= 1832$.

Das Alter und daraus das Geburtsjahr Sr. Majestät, des Königs von Preußen, Friedrich Wilhelm IV., algebraisch zu finden:

Multiplicirt man das Lebensalter Sr. Majestät mit der Jahreszahl der Geburt dieses erhabenen Monarchen, dann ist das Product 80775; dividirt man aber mit dem Alter in die Jahreszahl des Geburtsjahres, dann ist der Quotient $39\frac{8}{9}$.

Das Geburtsjahr sei x, $= 39\frac{8}{9}x$; $x \times 39\frac{8}{9} = 39\frac{8}{9}x^2$; es entsteht also die Gleichung

$39\frac{8}{9}x^2 = 80775$.

Der Bruch ausgeglichen: $359x^2 = 726975$; auf beiden Seiten mit 359 dividirt, giebt $x^2 = 2025$, daraus die Wurzel, giebt $x = 45$ Jahre.

Um daraus die Zahl des Geburtsjahres zu finden:

Der Quotient war $39\frac{8}{9}$, also umgekehrt, multiplicirt, $45 \times 39\frac{8}{9} = 359 \times 45, : 9 = 1795$; $+ 45 = 1840$; Se. Majestät ist also im Jahre 1840 im Alter von 45 Jahren.

Den Geburtstag Sr. Majestät auf eine andere Weise zu finden:

Wenn man die verflossenen Monate des Jahres mit der Zahl des Datums des Geburtstages multiplicirt, dann ist das Product $= 135$; dividirt man mit der Zahl der verflossenen Monate in die Zahl der Tage, vom 1sten des Monates, in welchem der Geburtstag ist, bis incl. des Geburtstages, dann ist der Quotient $= 1\frac{2}{3}$.

Die Zahl der bis zum Geburtsmonate verflossenen Monate sei x; also $x \times 1\frac{2}{3}x = 135$; d. i. $1\frac{2}{3}x^2 = 135$; oder $\frac{5}{3}x^2$

$= 135$; um den Nenner wegzuschaffen, wird mit 3 multiplicirt; also $5x^2 = 405$; $x^2 = 81$, daraus $\sqrt{\ } = 9$, die Zahl der verflossenen Monate, (Januar bis incl. September); der Quotient war $= 1^2/_3$, also umgekehrt, multiplicirt, $9 \times 1^2/_3 = 5 . 9, : 3 = 15$, also der 15te Tag im October.

Den Geburtstag Sr. Majestät des Kaisers von Oesterreich, Ferdinand I., algebraisch zu finden:

Subtrahirt man von der Zahl der Tage, vom 1sten Januar bis incl. des Geburtstages, 9 Tage, dividirt den Rest durch 2, addirt zu diesem Quotienten 10, dividirt die Summe durch 3, addirt zu diesem Quotienten $1/_4$ dieses Quotienten, und multiplicirt die Summe mit 4, dann entsteht die Zahl 100. (Das Jahr hat 365 Tage.)

Also $x - 9 : 2 + 10 : 3 + 1/_4 q \times 4 = 100$. Arithmetisch gelöset: $100 : 4 - 1/_5 \times 3 - 10 \times 2 + 9 = 109$; Januar, Februar und März $= 90$ Tage, $109 - 90 = 19$te April.

Algebraisch gelöset: $x - 9 : 2 + 10$ ist $= 1/_2 x - 4^1/_2 + 10$, oder $1/_2 x + 5^1/_2$. Dividirt durch $3 = 1/_6 x + 1^5/_6$; dazu $1/_4$ des Quotienten, also: 4; $1/_6 x : 4 = 1/_{24} x$, $1^5/_6 : 4 = {}^{11}/_{24}$, addirt, $1/_6 + 1/_{24} = 5/_{24} x$, ${}^{11}/_6 + {}^{11}/_{24} = {}^{55}/_{24}$ $(= 2^7/_{24})$, also zu dem Quotienten $1/_4$ desselben addirt $= 5/_{24} x + 2^7/_{24}$. Dieses multiplicirt mit 4 giebt ${}^{20}/_{24} x + 9^1/_6 = 100$, oder $5/_6 + 9^1/_6 = 100$. Die Brüche fortgeschafft, $\times 24$, giebt $20x + 220 = 2400$; transponirt, $20x = 2400 - 220$, mithin $20x = 2180$; also $x = 109$. Oder ebenso den verkürzten Bruch $5/_6$ behandelt, giebt $5x + 55 = 600$; $5x = 600 - 55$, oder $5x = 545$; also $x = 109$. Der 109te Tag im Jahre ist der 19te April.

Den Geburtstag Sr. Majestät des Königs von Sachsen, Friedrich August, algebraisch zu finden:

Subtrahirt man von der Zahl der Tage, vom 1sten Januar bis incl. des Geburtstages, 13, und addirt $1/_5$ des Restes zu 13; dann sind, wenn man diese Summe von der ganzen Zahl der Tage abzieht, den Rest durch 5 theilt, und zu dem Quotienten 18 addirt, beide so gebildete Summen einander gleich.

Die Zahl der Tage sei x; $x - 13 : 5 = 1/_5 x - 2^3/_5$; dazu $+ 13$ giebt $13 - 2^3/_5 = 10^2/_5$; also $x - 1/_5 x + 10^2/_5 = 4/_5 x - 10^2/_5$; diese durch 5 getheilt, giebt $4/_{25} x - 2^2/_{25}$; dazu

18 addirt, giebt $\frac{4}{25}x + 18 - 2\frac{2}{25}$; $18 - 2\frac{2}{25} = 15\frac{23}{25}$; die Gleichung ist also

$\frac{4}{25}x + 15\frac{23}{25} = \frac{1}{5}x + 10\frac{2}{5}$; transponirt

$15\frac{23}{25} - 10\frac{2}{5} = \frac{1}{5}x - \frac{4}{25}x$; abgezogen

$5\frac{13}{25} = \frac{1}{25}x$; also $x = (5 . 25 + 13 =) 138$; der 138ste Tag im Jahre ist der 18te Mai.

Das Lebensalter, den Tag und das Jahr der Geburt Sr. Majestät, des Königs Ludwig I. von Baiern algebraisch zu finden:

Addirt man das Alter Sr. Majestät und die Tage vom 1sten Januar bis incl. des Geburtstages, dann ist die Summe = 291; dividirt man das Alter durch 9, und diese Tage durch 3, und addirt beide Quotienten, dann entsteht die Zahl 85. (Das Jahr zu 365 Tagen.)

$291 - x$; $9 : x = \frac{1}{9}x$; $3 : 291 = 97$; $3 : -x = -\frac{1}{3}x$; also die Gleichung: $\frac{1}{9}x - \frac{1}{3}x + 97 = 85$;

abgezogen, $-\frac{2}{9}x + 97 = 85$; transponirt

$97 - 85 = \frac{2}{9}x$, also $12 = \frac{2}{9}x$, $6 = \frac{1}{9}x$, $x = (9 . 6 =)$ 54 Jahre; das Lebensalter Sr. Majestät.

Das Lebensalter und die Zahl der Tage rc. wurde oben addirt, und gab 291; also umgekehrt, subtrahirt, $291 - 54 = 237$, der 237ste Tag ist der 25ste August, der Geburtstag Sr. Majestät. Die Berechnung ist im Jahre 1840 gemacht, also $1840 - 54 = 1786$, das Geburtsjahr Sr. Majestät.

Den Geburtstag Sr. Königlichen Hoheit, des Großherzogs Carl Leopold Friedrich von Baden, im Jahre 1840 algebraisch zu finden.

Addirt man zu dem Lebensalter Sr Königlichen Hoheit 10 Jahre, dividirt die Summe durch 2, multiplicirt den Quotienten mit $1\frac{1}{2}$, dividirt das Product durch 9, und addirt diesen Quotienten mit dem vorigen Producte, dann bekommt man gerade die Zahl der Jahre des Lebensalters.

$x + 10 : 2 = \frac{1}{2}x + 5$; $\times 1\frac{1}{2} = \frac{3}{4}x + 7\frac{1}{2}$; $: 9 = \frac{3}{36}x + \frac{5}{6}$; zu dem vorigen Producte addirt $\frac{3}{4}x + \frac{3}{36}x = \frac{5}{6}x$, $7\frac{1}{2} + \frac{5}{6} = 8\frac{1}{3}$; also $\frac{5}{6}x + 8\frac{1}{3} = x$; transponirt, $8\frac{1}{3} = x - \frac{5}{6}x$, oder $\frac{1}{6}x = 8\frac{1}{3}$; folglich $x = 50$ Jahre, und da die Berechnung im Jahre 1840 angestellt wurde, $1840 - 50 = 1790$.

Es mögen noch einige Beispiele der Anwendung algebraischer Lösung bei Rechnungen mit **Procenten**, (s. o. S. 91), über **Metallgehalt** und über **specifisches Gewicht** folgen.

Z. B. Wie groß ist das Capital, dessen jährliche Zinsen zu 4% 3755 *₰* weniger, als die Hälfte des Capitales betragen? — Das Capital sei x, $4\% = 1/25$; also $1/25\,x = 1/2\,x - 3755$; transponirt $1/2\,x - 1/25\,x = 3755$, d. i. $23/50\,x = 3755$; auf beiden Seiten $\times\, 50$, giebt $23\,x = 187750$; folglich $x = 8163\,1/23$ *₰*. — (Das Capital giebt zu 4% $326\,12/23$ *₰* jährl. Zinsen; die Hälfte des Capitals x ist $4081\,12/23$, davon subtrahirt die jährlichen Zinsen, bleiben 3755 *₰*.

Z. B. Wie groß ist das Vermögen, dessen Hälfte zu $3\,1/2\,\%$, dessen $2/9$ zu $4\,1/3\,\%$ und der Rest zu $4\,1/2\,\%$ ausstehen, und dessen jährl. Zinsen 1200 *₰* betragen? — Zunächst wird der Rest gesucht aus $1/2 + 2/9$, Hauptnenner $= 18$, $: 2 = 9$, $= 9/18$, $18 : 9 = 2$, $\times\, 2 = 4/18$, Summa $13/18$; der Rest also $= 5/18$; ($9/18 \times 3\,1/2 = 31\,1/2$, $4/18 \times 4\,1/3 = 17\,1/3$, $5/18 \times 4\,1/2 = 22\,1/2$, Summa $71\,1/3$; nun läßt sich x durch einen Proportionalsatz finden, $71\,1/3 : 1200 = 1800 : x$; $b \times c = 6480000 : a = 30280\,40/107$.) Auf algebraischem Wege $(1/2\,x \times 3\,1/2) : 100 = (3\,1/2\,x) : 400$ oder $7\,x : 400$; $(2/9\,x \times 4\,1/3) : 100 = 26\,x : 2700$; $(5/18\,x \times 4\,1/2) : 100 = 45\,x : 3600$ oder $5\,x : 400$; also die Gleichung $(7\,x : 400) + (26\,x : 2700) + (5\,x : 400) = 1200$; $(5\,x + 7\,x = 12\,x : 400$ oder $3\,x : 100$; $100 : 2700 = 27$, also $3 \cdot 27 =)$ $81 + 26 = 107$; mithin die Gleichung $\frac{107\,x}{2700} = 1200$; auf beiden Seiten $\times\, 2700$, giebt $107\,x = 3240000$, folglich $x = 30280\,40/107$ *₰*.

Bei den **Metallvermischungen** giebt das Verhältniß des gemischten Metalles zum reinen Metalle ein Berechnungsmoment; 1 Mark reinen Silbers ist = 16 Loth, danach ein legirtes Silber 10, 11, 12 u. s. w. löthig; 1 Mark reinen Goldes = 24 Karat, also legirtes Gold 15, 16, 17 u. s. w. karatig. Will man bestimmen, wie viel Loth fein Silber m Loth p löthiges Silber enthalte, dann multiplicirt man m mit p, und dividirt durch 16. Ist das in Lothen ausgedrückte Gewicht des legirten Silbers = y, dann ist $y = m\,p : 16$; bei dem Golde ist $y = m\,p : 24$.

Z. B. Wie viel Loth 12löthigen Silbers muß man zu 75 Loth 15löth. Silbers thun, wenn die Vermischung 13löthig werden soll? 75 Loth 15löth. Silbers enthalten (75 . 15) : 16 Loth fein Silber; nun sollen x Loth 12löth. Silbers dazu, diese enthalten 12 x : 16 Loth fein Silber, und die zwei Massen zusammen (75 . 15) : 16 + 12 x : 16; die ganze Vermischung von 75 + x Loth soll 13löthig sein, also [13 (75 + x)] : 16 Loth fein Silber enthalten; also die Gleichung

$$\frac{75 \,.\, 15}{16} + \frac{12\,x}{16} = \frac{13\,(75 + x)}{16}$$ oder $75 \,.\, 15 + 12\,x = 13 \times (75 + x)$; oder $1125 + 12\,x = 975 + 13\,x$; transponirt, giebt $1125 - 975 = 13\,x - 12\,x$; folglich $x = 150$.

Unser obiges Beispiel, S. 64 und 65, algebraisch gelöset, erscheint $2\frac{1}{4}\,x = 16 \times 2\frac{1}{4} - 4\frac{1}{2}$; (d. i. $36 - 4\frac{1}{2}$ oder $31\frac{1}{2}$) also $2\frac{1}{4}\,x = 31\frac{1}{2}$ oder $9\,x = (63 \times 2 =)\,126$, folglich $x = 14$, (oder $9 \,.\, 2 = 18$, $63 \,.\, 4 = 252 : 18 = 14$).

Das **specifische** Gewicht ist das Verhältniß des Gewichtes zweier verschiedener Stoffe bei gleichem geometrischen Inhalte; z. B. das specifische Gewicht des Goldes ist $19{,}25$, d. h. 1 Cubiczoll Gold wiegt so viel, als $19\frac{25}{100}$ Cubiczoll destillirten Wassers. Hat ein Cubiczoll K eines Körpers ein spec. Gewicht = m, und ein Cubiczoll k eines andern = n, dann wiegt die Vermischung beider $mK + nk$ Cubiczoll destillirten Wassers; ist x das spec. Gewicht der Vermischung, dann wiegt diese, da sie $m + n$ Cubiczoll enthält, so viel als $x\,(K + k)$ Cubiczoll Wasser; also $x\,(m + n) = mK + nk$; $x = (mK + nk) : (m + n)$.

Ist c das absolute Gewicht eines Cubiczolls Wasser, dann ist mKc das absolute Gewicht eines Körpers von a Cubiczoll, dessen spec. Gewicht = m ist. Wird das absolute Gewicht durch G bezeichnet, dann ist $G = mac$; $a = G : mc$; und $m = G : ac$. Mittelst dieser Formeln ist aus dem gegebenen spec. Gewichte der geometrische Inhalt eines Körpers zu finden. Es sei z. B. das spec. Gewicht zweier Körper = m und n, das absolute = g und h, und es soll das spec. Gewicht der Vermischung gefunden werden, dann ist der geometrische Inhalt des einen = $g : mc$, (c = absol. Gewicht von 1 Cubiczoll Wasser), und der des andern = $h : nc$; der geometrische Inhalt der Vermischung also $(g : mc) + (h : nc)$. Ist x ihr spec. Gewicht, dann ist ihr absolutes Gewicht $cx\,[(g : mc) + (h : nc)]$; dieser Ausdruck ist $= g + h$, da dieses ihr absolutes Gewicht ist; mithin ist $cx = \frac{g + h}{(g/_{mc}) + (h/_{nc})}$. Multiplicirt man jedes Glied im Zähler und Nenner dieses Bruches mit dem Hauptnenner mnc, dann entsteht $cx = \frac{mnc\,(g + h)}{ng + mh}$ und $x = \frac{mn(g+h)}{ng+mh}$. Diese letzte Formel mag auf folgendes Beispiel angewendet werden: Wie viel Loth Silber müssen zu 25 Loth Gold gethan werden, wenn das spec. Gewicht der Vermischung $= 16$ sein soll? (das spec. Gewicht des Goldes $= 19,_{25}$, des Silbers $= 10,_{47}$). x sei das zu findende spec. Gewicht $= 16$, m $19,_{25}$, $n = 10,_{47}$, $g = 25$ und h das unbekannte Gewicht des Silbers; also $16 =$

$$\frac{19,_{25}\,.\,10,_{47}\,.\,(25 + h)}{10,_{47}\,.\,25\,.\,19,_{25}\,h} = \frac{201,_{5475}\,.\,(25 + h)}{10,_{47}\,.\,25 + 19,_{25}\,h} =$$

$\frac{5038,_{6875} + 201,_{5475}\,h}{261,_{75} + 19,_{25}\,h}$, daher $16\,(261,_{75} + 19,_{25}\,h) = 5038,_{6875} + 201,_{5475}\,h$; also $4188 + 308\,h = 5038,_{6875} + 201,_{5475}\,h$; transponirt, giebt $308\,h - 201,_{5475}\,h = 5038,_{6875} - 4188$; d. i. $106,_{4525}\,h - 850,_{6875}$; folglich $h = 7,_{9912\ldots} = 7^{112}/_{113}$ Loth.

Zuweilen scheint eine Forderung zwei oder drei Unbekannte zu enthalten; bringt man sie aber in eine Gleichung, dann verschwinden sie bis auf eine. Z. B. Von drei Mühlen einer Stadt liefert die eine in drei Monaten die Hälfte des jährlichen Mehlbedarfes der Einwohner; die zweite in 5 Monaten $1^1/_3$, und die dritte in 7 Monaten $1^3/_5$ dieses Bedarfes. Wie viel Monate müssen alle 3 Mühlen zugleich arbeiten, um den jährlichen Mehlbedarf zu produciren? — 3 Mühlen liefern den Bedarf in x Monaten; die eine in 3 Monaten $^1/_3$, also in 1 Mon. $^1/_6$, die zweite in 1 Mon. $^4/_{15}$ und die dritte in 1 Mon. $^8/_{35}$; also die Gleichung $\frac{x}{6} + \frac{4x}{15} + \frac{8x}{35} = 1$; $6\,.\,15\,.\,35 = 3150$ giebt den Hauptnenner; dieser : 6, . 1 = 525; : 15, . 4 = 840; : 35, . 8 = 720, Summe 2085, : 3150 = $1^{1065}/_{2085} = 1^{71}/_{139}$ Monat; oder abgekürzt, da 5 ein Factor von 15 ist, und die daraus gebildete 3 ein Factor von 6, nur $6\,.\,35 = 210$; also $35\,x + 56\,x + 48\,x = 210$; d. i. $139\,x = 210$, folglich $x = 1^{71}/_{139}$ Monat.

Wohl schwerlich im Kopfe, aber leicht auf unserer Tafel, ist dieses Beispiel in folgender Form zu berechnen: Eine Stadt hat 5 Mühlen; die eine liefert in $37\frac{1}{2}$ Tagen $\frac{2}{5}$ des jährlichen Mehlbedarfes; die zweite in $73\frac{2}{3}$ Tagen $1\frac{2}{5}$; die dritte in $219\frac{7}{8}$ Tagen $2\frac{2}{7}$; die vierte in $191\frac{5}{7}$ Tagen $1\frac{8}{9}$; und die fünfte in $61\frac{9}{10}$ Tagen $2\frac{8}{9}$ des Bedarfes.

Hier sind $a = \frac{4}{375}$; $b = \frac{21}{1105}$; $c = \frac{128}{12313}$; $d = \frac{119}{12078}$; und $e = \frac{260}{5571}$ in 1 Tage liefernd; mit möglicher Verkürzung durch 5 und 9 giebt dies einen Hauptnenner $= 7629096269544750$; die multiplicirten Quotienten sind $a = 81377026875144$; $b = 144987349918950$; $c = 793308399456000$; $d = 75166621632375$, und $e = 3560518811863000$, Summa $3941358209745469\,x$, und der Quotient ist 1 Tag und $\frac{3687738059799281}{3941358209745469}$ Tag; $\frac{36}{39} = \frac{12}{13}$; genauer, 1 Tag, 22 Stunden, 27 Minuten und 20 Secunden.

Zuweilen führen Gleichungen auf x^2, ohne vom zweiten Grade zu sein; hier verschwindet x^2 durch Reduction. Z. B. Es soll eine Zahl gefunden werden, daß, wenn man sie erst um 5 vermehrt, dann die gesuchte Zahl selbst um 8 vermindert, und die zwei aus diesen Operationen resultirenden Zahlen mit einander multiplicirt, das Product 76 weniger ist, als das Quadrat der Zahl. $(x + 5) \times (x - 8) = x^2 - 76$. Multiplicirt giebt diese Gleichung $x^2 - 3x - 40 = x^2 - 76$; in beiden Theilen x^2 gestrichen, $76 = 3x + 40$; daher $76 - 40 = 3x$, also $36 = 3x$, folglich $12 = x$. ($12 + 5 = 17$; $12 - 8 = 4$; $12^2 - 4 \,.\, 17 = 144 - 68 = 76$).

In manchen Gleichungen kommt das unbekannte x nicht als Factor eines Gliedes, sondern als Exponent einer Potenz vor, welche mittelst Logarithmen in Gleichungen vom 1sten Grade verwandelt werden können, da gleiche Größen auch gleiche Logarithmen haben; hiervon Beispiele s. o. S. 92 und 93. Z. B. Ein Faß hält 50 Maas rothen Weines; wie viel Mal nach einander muß man ein Maas desselben herausnehmen, und dafür 1 Maas weißen Weines hineingießen, bis 25 Maas rothen und eben so viel weißen Weines in diesem Fasse sind? — Nimmt man 1 Maas rothen Weines heraus, und gießt 1 Maas weißen Weines dafür hinein, dann wird jedem Maas des zurückbleibenden rothen Weines $\frac{1}{50}$ Maas entzogen, und durch $\frac{1}{50}$ Maas weißen Weines ersetzt; die Quantität des restirenden rothen Weines (nach jedem Nehmen von 1 Maas rothen und jedem Zusetzen von 1 Maas weißen Weines) findet man durch Multiplication von $^{49}/_{50}$. Nach dem ersten Schöpfen und Zugießen bleiben von den 50 Maas rothen Weines, $50 \times (^{49}/_{50})$; nach dem zweiten, $50 \times (^{49}/_{50})^2$, dem dritten, $50 \times (^{49}/_{50})^3$, überhaupt also nach dem xten, $50 \times (^{49}/_{50})^x$. Ist x die Anzahl der Schöpf- und Zugieß-Operationen, nach welchen 25 Maas rothen und 25 Maas weißen Weines im Fasse sind, dann hat man die Gleichung $50 \times (^{49}/_{50})^x = 25$. Also Log. 50 + Lg. $(^{49}/_{50})^x$ = Lg. 25; demnach Lg. 50 + x Lg. $^{49}/_{50}$ = Lg. 25; ausgeführt: Lg. 50 + x (Lg. 49 — Lg. 50) = Lg. 25; transponirt, giebt x (Lg. 49 — Lg. 50) = Lg. 25 — Lg. 50; somit $x = \frac{\text{Lg. } 25 - \text{Lg. } 50}{\text{Lg. } 49 - \text{Lg. } 50} = \frac{\text{Lg. } 50 - \text{Lg. } 25}{\text{Lg. } 50 - \text{Lg. } 49} = \frac{\text{Lg. } 2}{\text{Lg. } 50 - \text{Lg. } 49}$, d. i. 0,3010300 : 0,0087739 = $34_{,298135}$...; der Bruch ist fast $^2/_7$ oder $^3/_{10}$; also $34^3/_{10}$ Mal geschöpft und zugegossen.

B. Sind zwei Unbekannte zu berechnen, dann bedarf man auch zweier Gleichungen; alle diese vom ersten Grade sind auf die Form (1) $ax + by = c$, und (2) $px + qy = n$ zurückzuführen; die Werthe von x und y werden gesucht, und somit beide Gleichungen identisch gemacht; es muß also aus beiden Gleichungen eine dritte gebildet werden, welche nur 1 unkanntes x oder y enthält; diesen gefundenen Werth substituirt man in eine der beiden Gleichungen, und findet daraus die andere Unbekannte. — Diese Formel-Gleichungen aufzulösen, verfährt man folgendermaßen: Man multiplicirt die (1) mit q, und die (2) mit b, und erhält (3) $aqx + bqy = qc$, und (4) $pbx + qby = bn$; (4) wird von (3) subtrahirt, und giebt $aqx - pbx = qc - bn$, also $x (aq - pb) = qc - bn$ oder $x = (qc - bn) : (aq - pb)$. Ebenso erhält man, wenn man (1) mit p, und (2) mit a multiplicirt, das y; und zwar (5) $apx + bpy = pc$; (6) $pax + qay = an$; (6) wird von (5) subtrahirt, und giebt $bpy - qay = pc - an$, also $y (bp - qa) = pc - an$, oder $y = (an - pc) : (aq - pb)$. Z. B. (1) $3x + 5y = 21$, und (2) $7x + 9y = 41$; hier ist $a = 3$, $b = 5$, $c = 21$; $p = 7$, $q = 9$, $n = 41$; also $x = (9 . 21 - 5 . 41) : (3 . 9 - 5 . 7) = (189 - 205) : (27 -$

35) = (— 16 : — 8) 2; $y = (3 . 41 - 7 . 21) : (3 . 9 - 5 . 7) = (123 - 147) : (27 - 35) = (-24 : -8)\ 3$.

Es muß also x oder y eliminirt, d. h. weggeschafft werden. Diese Elimination kann nach mehreren Methoden geschehen. Die gebräuchlichsten sind: 1) die Substitutionsmethode, Unterschiebungsmethode; 2) die Combinationsmethode, Zusammenstellungsmethode; 3) die Methode durch (Multiplication mit nachheriger) Subtraction oder Addition.

1) Man löset die Gleichung auf, indem man z. B. x als bekannt ansieht, danach y auflöset, und dann den für y gefundenen Werth, welcher x enthalten wird, in die andere Gleichung für y substituirt, also überall dahin stellt, wo sich in dieser andern Gleichung y befindet, wodurch dieses hier verschwindet, und der Werth von x gefunden wird. Z. B. $ax + by = c$ und $px + qy = n$; hier wird $y = (c - ax) : b$, und $px + q \times \frac{c - ax}{b}$ oder $(bq - aq) \times x = bn - cq$. Nehmen wir die beiden Gleichungen (1) $ax + by = c$ und (2) $fx + gy = h$; hier wird (3) $x = (c - by) : a$, und (4) $x = (h - gy) : f$; werden die Werthe von x gleichgesetzt, dann entsteht die Gleichung mit 1 Unbekannten $(c - by : a = (h - gy) : f$; demnach $fc - fby = ah - agy$; d. i. $(ag - fb)\ y = ah - fc$; also $y = (ah - fc) : (ag - fb)$. Substituirt man diesen Werth von y in (3) und (4), dann entsteht:

$$x = \frac{c - b\left(\frac{ah - fc}{ag - fb}\right)}{a} = \frac{c - \frac{abh - fbc}{ag - fb}}{a} = \frac{gc - bh}{ag - fb}.$$

Z. B. Die Zahl 17 soll in zwei solche Theile zerlegt werden, daß wenn man den ersten mit 5, und den zweiten mit 7 multiplicirt, die Summe der Producte = 103 sei.

(1) $x + y = 17$ und (2) $5x + 7y = 103$.

Hier ist $y = 17 - x$; dieser Ausdruck für y in (2) substituirt, giebt $5x + 7 \times (17 - x) = 103$, oder $5x + 119 - 7x = 103$; transponirt, giebt $5x - 7x = 103 - 119$. d. i. $-2x = -16$; $2x = 16$, folglich $x = 8$. Der Werth von y wird nun gefunden, indem man den gefundenen Werth von x (= 8) in eine der Gleichungen für y substituirt; also in

$x + y = 17$, entsteht $8 + y = 17$, folglich $y = 17 - 8 = 9$. ($5 \cdot 8 = 40$; $7 \cdot 9 = 63$, Summe 103).

Z. B. x und y haben zusammen 12000 ₰; nachdem sich das Capital des x um 5 % vermehrt, und das des y um 3 % vermindert hat, haben sie zusammen 12440 ₰. Wie viel hatte Jeder Anfangs?

$x + y = 12000$, und $105\,x : 100 + 97\,y : 100 = 12440$; $105\,x + 97\,y = 1244000$; $y = 12000 - x$; $105\,x + 97 \times (12000 - x) = 1244000$; $105\,x + 1164000 - 97\,x = 1244000$; $105\,x - 97\,x = 8\,x$, also $8\,x = 1244000 - 1164000$; d. i. $8\,x = 80000$, folglich $x = 10000$ ₰. $10000 + y = 12000$, demnach $y = 12000 - 10000$; folglich $y = 2000$ ₰.

2) Man sucht aus jeder Gleichung den Werth für eine und dieselbe der beiden Unbekannten, z. B. y, und **combinirt** beide Werthe, d. h. man setzt beide Werthe einander gleich. Die beiden obigen Grundformen geben $y = (c - a\,x) : b$, und $y = (n - p\,x) : q$, also $\frac{c - a\,x}{b} = \frac{n - p\,x}{q}$, oder $(b\,q - a\,q) \times x = b\,n - c\,q$.

Z. B. 15 Franken und 9 Guineen sind zusammen 115 fl. Rheinl., und 4 Guineen sind 6 fl. Rh. mehr, als 90 Franken; wie viel fl. Rhl. hat 1 Frank, und wie viel fl. Rhl. 1 Guinee?

1 Guinee habe x fl., und 1 Frank y fl.; also

(1) $9\,x + 15\,y = 115$ (2) $4\,x = 90\,y + 6$, oder verkleinert (2) $2\,x = 45\,y + 3$; der Werth für x ergiebt sich in (1) $x = \frac{115 - 15\,y}{9}$ und in (2) $x = \frac{45\,y + 3}{2}$; beide combinirt, geben $(115 - 15\,y) : 9 = (45\,y + 3) : 2$; Nenner mit entgegengesetztem Zähler multiplicirt, geben $230 - 30\,y = 405\,y + 27$; transponirt, entsteht $230 - 27 = 405\,y + 30\,y$, d. i. $203 = 435\,y$, folglich $y = {}^{203}/_{435} = {}^{7}/_{15}$ fl. = 1 Frank. — Aus dem nun bekannten y wird x aus (2) gefunden, $x = \frac{45 \cdot {}^{7}/_{15} + 3}{2}$, ($45 \cdot 7 : 15 = 21$, $+ 3 = 24$, $: 2 = 12$), also $x = 12$ fl. = 1 Guinee.

3) Jede Gleichung mit 2 Unbekannten, x und y, läßt sich auf 3 Glieder bringen, von denen das eine x, das andere y als Factor enthält, und das dritte völlig unbekannt ist. **Multi-**

plicirt man nun alle Glieder der (1) mit dem Coëfficienten von y aus (2), und ebenso (2) mit dem Coëfficienten von y aus (1), (wodurch y in (1) und (2) denselben Coëfficienten erhält), dann braucht man nur, bei gleichen Zeichen, die eine Gleichung von der andern zu subtrahiren, bei ungleichen Zeichen beide Gleichungen zu addiren, um eine (3) Gleichung zu erhalten, in welcher y nicht vorkommt, und durch welche man x findet. Ebenso giebt die Multiplication der (1) mit dem Coëfficienten von x aus (2), und umgekehrt, das gesuchte y.

Z. B. 154 ℔ Zimmt und 228 ℔ Kaffee kosten zusammen 829 ℛ 20 ℊ; 213 ℔ Zimmt und 457 ℔ Kaffee kosten 1200 ℛ 21 ℊ. Wie viel kostet 1 ℔ Zimmt, und 1 ℔ Kaffee? (1) $154\,x + 228\,y = 829^5/_6$, (2) $213\,x + 457\,y = 1200^7/_8$; die Brüche auf gleiche Nenner gebracht, giebt $^{20}/_{24}$ und $^{21}/_{24}$; die Brüche ausgeglichen, giebt $^{19916}/_{24}$ und $^{28821}/_{24}$. Mit dem Coëfficienten von y aus (1) 228, die (2), und mit dito aus (2) 457, die (1) multiplicirt, giebt

$$\begin{array}{ll} (1)\ 70378\,x + 104196\,y = {}^{9101612}/_{24}, & \\ (2)\ 48564\,x + 104196\,y = {}^{6571188}/_{24}; & \text{subtrahirt} \\ \hline (3)\ 21814\,x \quad \text{———} \quad = {}^{2530424}/_{24}, & \text{folglich} \end{array}$$

$x = {}^{116}/_{24} = 4^5/_6$ ℛ $= 1$ ℔ Zimmt.

Ebenso mit dem Coëfficienten von x aus (2) 213, die (1), und mit dito aus (1) 154, die (2) multiplicirt, giebt

$$\begin{array}{ll} (1)\ 32802\,x + 48564\,y = {}^{4242108}/_{24}, & \text{subtrahirt} \\ (2)\ 32802\,x + 70378\,y = {}^{4438434}/_{24}; & \\ \hline (3)\ \text{———} \quad 21814\,y = {}^{196326}/_{24}, & \text{folglich} \end{array}$$

$y = {}^9/_{24} = 9$ ℊ $= 1$ ℔ Kaffee.

Man kann sich auch einen gemeinschaftlichen Nenner, als Divisor, bilden, und durch Multiplication, Subtraction und Division x und y finden. Z. B. $a\,x + b\,y = p$, und $c\,x + d\,y = q$; man multiplicirt kreuzweise Coëfficienten und Summen, subtrahirt die Producte von einander, und dividirt den Rest durch den, aus den Coëfficienten der 4 vorderen Glieder ebenso gebildeten gemeinschaftlichen Nenner; also $x = \frac{p\,.\,d - b\,.\,q}{a\,.\,d - b\,.\,c}$ und $y = \frac{a\,.\,q - c\,.\,p}{a\,.\,d - b\,.\,c}$. In dem eben entwickelten Beispiele also $x =$ $[(19916\,.\,457) - (28821\,.\,228)] : [154\,.\,457) - (228\,.\,213)]$

und $y = [(28821 . 154) - (19916 . 213)] : [(154 . 457) - (228 . 213)]$; $x = {}^{116}/_{24}$, $y = {}^{9}/_{24}$.

Die englische Methode läßt in jeder Gleichung den Coëfficienten der zu eliminirenden Größe y gleich groß machen, (indem man ihren gemeinschaftlichen Nenner an ihre Stelle zu bringen sucht), und addirt oder subtrahirt diese so verwandelten Gleichungen, je nachdem die beiden Coëfficienten verschiedene oder gleiche Zeichen haben. So erhält man aus der Gleichung $y = (c - a x) : b$, $a q x + b q y = c q$

$$\begin{array}{l} b p x + b q y = b n \quad \text{subtrahirt} \\ \hline (a q - b p) x = c q - b n \end{array}$$

oder $(b p - a q) x = b n - c q$.

Nach der Bezout'schen oder französischen Methode multiplicirt man eine Gleichung mit einem beliebigen Factor, k, und addirt sie zu der andern; z. B. aus $y = (n - p x) : q$ wird $(a + k p) x + (b + k q) y = c + k n$. Diese Gleichung gilt für den Werth von k, folglich auch für einen solchen, welcher den Coëfficienten von y, $(b + k q)$ zu Null macht. Dieser ist $k = -(b : q)$; setzt man diesen in die eben gebildete Gleichung, dann ist $[a - (b p : q)] x = c - (b n : q)$, oder $(a q - b p) x = c q - b n$, oder $(b p - a q) x = b n - c q$. Soll x eliminirt werden, dann wird $a + k p = 0$, also $k = -(a : p)$, u. s. w.

C. Sind drei und mehrere Unbekannte zu berechnen, dann fordert die Lösung drei oder mehrere der Anzahl der zu suchenden Unbekannten entsprechende Gleichungen; sind diese nicht ausführbar, dann bleiben die Größen unbestimmt. Hat man z. B. für 3 Größen, x, y, z, nur 2 Gleichungen, dann kann man für die dritte Größe einen willkürlichen Werth annehmen, und diesen in den beiden Gleichungen substituiren; jede andere Annahme für z macht aber andere Werthe für x und y. — Zur Lösung von 3 Unbekannten in 3 Gleichungen kann man den Werth von x in (2) und (3) substituiren, wodurch man (4) und (5) erhält, welche nur x und y enthalten. — Bequemer ist die Elimination durch Addition und Subtraction. Man multiplicirt (1) mit dem Coëfficienten von z aus (2), und (2) mit dem von z aus (1), addirt oder subtrahirt die Producte, je nach den gleichen oder entgegengesetzten Zeichen von z; (a) enthält nun x und y; nun bearbeitet man ebenso (1) und (3), und bekommt

(b) die zweite Gleichung für x und y; aus (a) und (b) schafft man durch Wechsel-Multiplication mit y dieses fort, und gewinnt x; nun wird x in (b) mit dem für x gefundenen numerischen Werthe multiplicirt, die Gleichung transponirt, abgezogen, und y gefunden. z ergiebt sich durch Multiplication der Werthe von x und y mit den Coëfficienten dieser in einer Gleichung, und durch Subtraction. Z. B. 4 Malter Tannenholz (x) und 3 Malter Eichenholz (y) kosten zusammen 38 Thlr.; 7 Malter Tannenholz (x) und 2 Malter Büchenholz (z) kosten zusammen 49 Thlr., und 8 Malter Eichenholz (y) und 5 Malter Büchenholz (z) kosten 83 Thlr. Wie viel kostet 1 Malter jeder Holzart?

(1) $4x + 3y = 38$; (2) $7x + 2z = 49$; (3) $8y + 5z = 83$.

(1) $4x = 38 - 3y$, also $x = (38 - 3y) : 4$ und

(2) $7x = 49 - 2z$, also $x = (49 - 2z) : 7$; den ersten Ausdruck für x in (2) substituirt, $[(7 \,.\, 38 - 7 \,.\, 3) : 4]$ giebt $[(266 - 21y) : 4] + 2z = 49$; daher $266 - 21y + 8z = 196$; transponirt, $8z = 196 - 266 + 21y$, also $21y - 70$, und $z = (21y - 70) : 8$. Dieser Werth von z in die dritte Gleichung substituirt $[(5 \,.\, 21y - 5 \,.\, 70) : 8]$, giebt $8y + (105y - 350) : 8 = 83$; demnach $(8 \,.\, 8)$, $64y + 105y - 350 = 664$; transponirt, $64y + 105y = 664 + 350$; also $169y = 1014$, folglich $y = 6$. Nun der Werth von y in die z Gleichung gebracht, giebt $z = (21 \,.\, 6 - 70) : 8 = {}^{56}/_{8} = 7$; und in die obige x Gleichung gebracht, giebt $x = (38 - 3 \,.\, 6) : 4 = {}^{20}/_{4} = 5$.

Z. B. Auf den Wagen eines Dampfzuges von Magdeburg nach Leipzig befinden sich 214 Passagiere in III Classen von x, y, z Preisen. 15 Personen der I. Classe, 13 der II. und 7 der III. zahlen zusammen 85 Thlr. 2 Sgr., 11 der I., 9 der II. und 19 der III. zahlen zusammen 79 Thlr. 22 Sgr.; 17 der I., 12 der II. und 21 der III. zahlen zusammen 108 Thlr. Wie viel kostet der Platz der I., der II. und der III. Classe?

(1) $15x + 13y + 7z = 85^{1}/_{15}$ Thlr. $= 2552$ Sgr.

(2) $11x + 9y + 19z = 79^{11}/_{15}$ 〃 $= 2392$ 〃

(3) $17x + 12y + 21z = 108$ 〃 $= 3240$ 〃

Zunächst multiplicirt man (1) mit dem Coëfficienten von z aus (2), und (2) mit dem aus (1), um z zu eliminiren. (1) wird $285x + 247y + 133z = 48488$, und (2) wird $77x +$

$63\,y + 133\,z = 16744$; (2) von (1) subtrahirt, giebt (a) $208\,x + 184\,y = 31744$. Nun multiplicirt man (1) mit dem Coëfficienten von z aus (3), und (3) mit dem aus (1), um auch hier z zu eliminiren; (1) wird $315\,x + 273\,y + 147\,z = 53592$, und (3) wird $119\,x + 84\,y + 147\,z = 22680$; (3) von (1) subtrahirt, giebt (b) $196x + 189y = 30912$. Endlich multiplicirt man (a) mit dem Coëfficienten von y aus (b), und (b) mit dem aus (a), um y zu eliminiren; (a) wird $39312\,x + 34776\,y = 5999616$; und (b) wird $36064\,x + 34776\,y = 5687808$; (b) von (a) subtrahirt, giebt (c) $3248\,x = 311808$, folglich $x = 96$ Sgr. Um y zu finden, multiplicirt man in (b) das x mit dem für x eben gefundenen numer. Werthe, also $196\,x \times 96$, und bekommt $18816\,x + 189\,y = 30912$; transponirt, $189\,y = 30912 - 18816$, d. i. $189\,y = 12096$, folglich $y = 64$ Sgr. Mit den für x und y eben gefundenen numer. Werthen wird nun eine Gleichung behandelt, z. B. (1) $15\,x \times 96$ und $13\,y \times 64$, giebt $1440\,x + 832\,y + 7\,z = 2552$; transponirt, $7\,z = 2552 - 1440 - 832$, d. i. $7\,z = 280$, folglich $z = 40$ Sgr.

Auf einem ähnlichen Wege kommt man zu gleichem Resultate: Man multiplicirt (1) mit (2) wie oben, und bekommt (1) $285\,x + 247\,y + 133\,z = 48488$, (2) $77\,x + 63\,y + 133\,z = 16744$; nun multiplicirt man dieses Product von (1) und das von (2) mit dem Coëfficienten von z aus (3), und erhält (a) $5985\,x + 5187\,y + 2793\,z = 1018248$, und (b) $1617\,x + 1323\,y + 2793\,z = 351624$; (b) von (a) subtrahirt, giebt (c) $4368\,x + 3864\,y = 666624$. Nun wird (3) mit dem Coëfficienten von z aus (1) und (2) multiplicirt, um auch hier z zu eliminiren; dieses giebt (d) $2261\,x + 1596\,y + 2793\,z = 430920$. Nun (d) von (a) subtrahirt, giebt (e) $3724\,x + 3591\,y = 587328$. Um y zu eliminiren, wird (c) mit dem Coëfficienten von y aus (e), und (e) mit dem aus (c) multiplicirt; (c) wird (f) $15685488\,x + 13875624\,y = 2393846784$, und (e) wird (g) $14389536\,x + 13875624\,y = 2269435392$; (g) von (f) subtrahirt, giebt $1295952\,x = 124411392$, folglich $x = 96$. Nun wird aus (e) das x mit dem eben gefundenen numer. Werthe von x multiplicirt, also $3724\,x \times 96$, d. i. $357504\,x + 3591\,y = 587328$; dieses x Product von der Summe subtrahirt, giebt $3591\,y = 229824$, folglich $y = 64$. Das z wird, wie oben, gefunden.

Ein dritter Weg ist folgender: Man findet durch Elimination von y und z zuerst x allein; dann durch Elimination von x das y, und endlich z durch Substituirung der für x und y gefundenen numer. Werthe in eine der Gleichungen, und durch Subtraction. Man multiplicirt kreuzweise die Coëfficienten von y und z der (2) und (3), zieht die Producte von einander ab, und multiplicirt mit dem Reste (1). Dann multiplicirt man kreuzweise die Coëficiencen von y und z der (1) und (3), ꝛc.; der Rest ist der Multiplicator der (2); endlich multiplicirt man kreuzweise die Coëficienten von y und z der (1) und (2) ꝛc.; der Rest ist Multiplicator der (3). Man multiplicirt die Gleichungen, addirt die Producte von (1) und (2), subtrahirt von dieser Summe das Product von (3), der Rest ist x. Ebenso verfährt man, um x zu eliminiren, indem man kreuzweise die Coëficienten von x und z der (2) und (3) multiplicirt, die Producte von einander abzieht, und mit dem Reste (1) multiplicirt; dann ebenso von (1) und (3), und zuletzt von (1) und (2); die Reste werden die Multiplicatoren für (2) und (3). Die Producte von (1) und (2) addirt man, subtrahirt von der Summe das Product von (3) und erhält y; z wird, wie oben, gefunden. Es entsteht also

$12 . 19 - 9 . 21 = 39$ für (1) u. $17 . 19 - 11 . 21 = 92$ für (1)
$13 . 21 - 12 . 7 = 189$ „ (2) $15 . 21 - 7 . 17 = 196$ „ (2)
$9 . 7 - 13 . 19 = 184$ „ (3) $15 . 19 - 7 . 11 = 208$ „ (3)

(1) $\times$ 39 giebt $585x + 507y + 273z = 99528$
(2) $\times$ 189 „ $2079x + 1701y + 3591z = 452088$

addirt $= 2664x + 2208y + 3864z = 551616$, subtr. v.
(3) $\times$ 184 $3128x + 2208y + 3864z = 596160$

$464x = 44544$, folglich
$x = 96.$

(1) $\times$ 92 giebt $1380x + 1196y + 644z = 234784$
(2) $\times$ 196 „ $2156x + 1764y + 3724z = 468832$

addirt $= 3536x + 2960y + 4368z = 703616$
(3) $\times$ 208 $3536x + 2496y + 5880z = 673920$

subtrahirt $= 464y = 29696$, folglich
$y = 64.$

$96 . 15x + 64 . 13y + 7z = 2552$; giebt transponirt und subtrahirt, $7z = 280$, folglich $z = 40$.

D. Bei den unbestimmten oder diophantischen Gleichungen sind weniger Gleichungen (n) ausführbar, als unbekannte Größen (p) gegeben sind; die Werthe bleiben deshalb unbestimmt. Man kann für eine Unbekannte verschiedene Werthe ermitteln, und von einem jeden dieser die correspondirenden Werthe der übrigen Größen herleiten. 1) Man eliminirt so viel unbekannte Größen, als möglich; dann erhält man eine Gleichung mit $(p - n + 1)$ unbekannten Größen; in diesen nimmt man für $(p - n)$ dieser $(p - n + 1)$ unbekannten Größen beliebige, den Bedingungen der Aufgabe entsprechende Werthe an, und bestimmt dadurch die übrigbleibenden derselben $(p - n + 1)$ unbekannten Größen. Den für diese Unbekannte gefundenen Werth und die angenommenen Werthe jener $(p - n)$ Unbekannten substituirt man in den dazu anwendbaren Gleichungen; dann erhält man die dem angenommenen Werthe jener $(p - n)$ Unbekannten correspondirenden Werthe der übrigen n Unbekannten.

Z. B. $x + y + z + u = 18$ und $x + 2y + 3z + 4u = 50$. $x = 18 - y - z - u$ und $x = 50 - 2y - 3z - 4u$, demnach $18 - y - z - u = 50 - 2y - 3z - 4u$, also $y = 32 - 2z - 3u$ und $x = z + 2u - 14$.

Nimmt man nun für z und u solche Zahlen an, daß 32 größer als $2z + 3u$, und $z + 2u$ größer als 14 ist, dann erhält man durch Substitution die correspondirenden Werthe der unbekannten x und y. — Nimmt man für $z = 1$, und für $u = 7$, dann ist $x = 1$, $y = 9$; oder $z = 1$, $u = 8$, dann $x = 3$, $y = 6$; oder $z = 1$, $u = 9$, dann $x = 5$, $y = 3$; oder $z = 2$, $u = 7$, dann $x = 2$, $y = 7$; $z = 2$, $u = 8$, dann $x = 4$, $y = 4$; oder $z = 2$, $u = 9$, dann $x = 6$, $y = 1$ ꝛc.

Sollen z. B. die der Gleichung $8x + 5 = 11y + 4$ entsprechenden ganzen Zahlen für x und y gefunden werden, $x = \frac{11y - 1}{8} = y + \frac{3y - 1}{8}$; setzt man $(3y - 1) : 8 = t$, dann ist $y = \frac{8t + 1}{3} = 2t + \frac{2t + 1}{3}$; wird diese letzte Gleichung $(2t + 1) : 3 = u$ gesetzt, dann ist $t = \frac{3u - 1}{2} = u + \frac{u - 1}{2}$; setzt man diese Gleichung $(u - 1) : 2 = v$, dann ist $u = 2v + 1$, und $t = [3(2v + 1) - 1] : 2 = 3v + 1$; folglich $y =$

$[8(3v+1)+1]:3=8v+3$, und $x=[11(8v+3)-1]:8=11v+4$. Nimmt man für v Null oder jede ganze Zahl an, dann erhält man für x und y die gesuchten Zahlen; ist $v=0$, dann ist $x=4$, $y=3$; $v=1$, dann $x=15$, $y=11$; $v=2$, dann $x=26$, $y=19$; $v=3$, dann $x=37$, $y=27$ rc.

Z. B. N. kauft für 1770 ℛ︎ Pferde und Ochsen; ein Pferd (x) kostet 31 ℛ︎, ein Ochse (y) 21 ℛ︎; wie viel Pferde und Ochsen kaufte N.?

$31x+21y=1770$; $x=21u-12$; $y=102-31u$; also $x=9$, $y=71$; oder $x=30$, $y=40$; oder $x=51$, $y=9$.

2) Es lassen sich diese in Zahlengrößen gegebenen diophantischen Gleichungen meistens auch auf arithmetischem Wege durch vergleichende Rückschlüsse lösen. Es soll z. B. die Zahl 1000 in 2 solche Theile zerlegt werden, daß der eine durch 13, der andere durch 33 theilbar ist.

33 : 1000 | 30 mal und 10 Rest; 13 : 33 | 2 mal und 7 Rest; man sucht nun ein Vielfaches von 7, welches, wenn ihm 10 zuaddirt werden, durch 13 theilbar ist; 7 . 6 = 42 + 10 = 52 : 13 = 4. Diesen Multiplicator subtrahirt man von obigem Quotienten, 30 — 6 = 24; 33 . 24 = 792; 1000 — 792 = 208 : 13 = 16; (792 + 208 = 1000). Noch eine Theilung wird gefunden durch 33 . 13 = 429, abgezogen von 792, Rest 363 : 33 = 11; 492 + 208 = 637 : 13 = 49.

Z. B. N. wechselt gegen Kronthaler (zu 2 fl. 42 Kr. Rheinl.) Preußische Thaler (zu 1 fl. 45 Kr. Rh.) ein, und bekommt 3 Kr. heraus; wie viele Kronthaler hat N. gegeben, und wie viele Preußische Thaler bekommen?

2 fl. 42 Kr. = 162 Kr.; 1 fl. 45 Kr. = 105 Kr.; also 162 — 105 = 3, oder durch 3 dividirt, 54 — 35 = 1; 54 — 35 = 19; man sucht nun ein Vielfaches von 19, welches : 35, zum Reste 1 giebt; 24 . 19 = 456 : 35 = 13 + 1; also 24 Kronth.; 24 . 54 = 1296 : 35 = 37 + 1, also 37 Preußische Thaler.

Z. B. N. will eine Schuld von 176 fl. 45 Kr. Rh. mit Kronthalern und Preußischen Thalern bezahlen; wie viele Stücke beider Geldsorten muß er zahlen? 162 + 105 = 10605. Die Kreuzersumme 10605 : 162 | 65 mal und 75 Rest; 162 : 105 | 1 mal und 57 Rest; also 57 . 30 = 1710 + 75 = 1785 :

105 = 17; 65 — 30 = 35 Kronthaler; 35 . 162 = 5670, abgezogen von 10605 = 4935 : 105 = 47 Preußische Thaler.

Z. B. N. verkauft Wein, das Maas zu 2 fl. 35 Kr. Rh., und erhält dafür Zucker, das Pfund zu 39 Kr., und muß 7 Kr. herausgeben; wie viel Wein hat er gegeben, und wie viel Zucker bekommen? 2 fl. 35 Kr. = 155, : 39 = 3, Rest 38; man sucht ein Vielfaches von 38, welches, + 7, sich durch 39 theilen läßt; 7 . 38 = 266 + 7 = 273 : 39 = 7, also 7 Maas Wein; 39 : 155 | $3^{38}/_{39}$, wofür 4 genommen werden darf; 7 . 4 = 28 ℔ Zucker; 7 . 155 = 1085, 28 . 39 = 1092, Differenz = 7.

Z. B. N. kauft für 400 ℛ 124 Stück Vieh, (a) Schweine, (b) Ziegen und (c) Schafe; ein Schwein kostet $4^1/_2$ ℛ, eine Ziege $3^1/_6$ ℛ und ein Schaf $1^1/_4$ ℛ. Wie viel Stück kaufte N. von jeder Gattung? Nimmt man an, N. kaufte für 124 ℛ Schafe à $1^1/_4$ ℛ, dann würden diese 155 — 400 = 245 ℛ kosten. Der Unterschied des Preises zwischen c und a ($1^1/_4$ und $4^1/_2$) ist $3^1/_4$ ℛ; $3^1/_4$: 245 = 75 Schweine, Rest $^5/_4$ ℛ = 30 ℳ. Die Differenz zwischen a und b ($4^1/_2$ und $3^1/_6$) ist $1^1/_3$ ℛ = 32 ℳ; so oft man nun ein Schwein weniger kauft, so oft kann man mit dem Reste von 32 ℳ eine Ziege mehr kaufen. Die Differenz zwischen b und c ($3^1/_6$ und $1^1/_4$) ist $1^{11}/_{12}$ = 46 ℳ; man sucht nun ein Vielfaches von 32, welches + 30, durch 46 theilbar ist; 32 . 12 = 384 + 30 = 414 : 46 = 9; für 12 Schweine bekommt man also 12 + 9 Ziegen. Folglich 75 — 12 = 63 Schweine, 12 + 9 = 21 Ziegen, und (Schweine + Ziegen — der Stückzahl, 63 + 21 — 124 =) 40 Schafe. — Die Differenz zwischen a und c ist $3^1/_4$ ℛ = 78 ℳ; verkleinert durch 2 = 39; die Differenz zwischen b und c ist $1^{11}/_{12}$ ℛ = 46 ℳ, : 2 = 23; für 23 Schweine kann man demnach 39 Ziegen kaufen; folglich 63 — 23 = 40 Schweine; 21 + 39 = 60 Ziegen; 40 + 60 — 124 = 24 Schafe. Endlich noch 40 — 23 = 17 Schweine, 39 + 60 = 99 Ziegen, 17 + 99 — 124 = 8 Schafe; ein kleineres Verhältniß giebt es hier nicht, weil 23 gegen 39 (beide relative Primzahlen) nicht zu heben ist.

Im folgenden Beispiele finden sich 22 mögliche Verhältnisse: Auf einem Dampfzuge von Magdeburg nach Leipzig befinden sich 214 Passagiere in III Classen, I zu 3 ℛ 6 Sgr., II zu 2 ℛ 4 Sgr. und III zu 1 ℛ 10 Sgr.; die Einnahme von 214

Passagieren ist 405 ℛ 18 Sgr. Wie viele Passagiere befinden sich in der Isten, wie viele in der IIten, und wie viele in der IIIten Classe? I = 96 Sgr., II = 64, III = 40; 405 ℛ 18 Sgr. = 12168; die Anzahl = 214. Wären alle Passagiere von Classe III, dann wären 40 . 214 = 8560 Sgr. die Einnahme, also abgezogen von 12168, Rest 3608. Die Differenz zwischen II und III (64 und 40) ist 24; 24 : 3608 = 150 und 8 Rest; die Differenz zwischen I und III (96 und 40) ist 56; man sucht nun ein Vielfaches von 24, welches + 8, durch 56 theilbar ist; 2 . 24 = 48 + 8 = 56 : 56 = 1, also von I 1 Passagier; 150 — 2 = 148 Passagiere von II; 214 — 148 = 66 — 1 = 65 Passagiere von III; (96 + 9472 + 2600 = 12168 Sgr). — Die Differenz zwischen 96 — 40 und 64 — 40 ist = 3 : 7; also für 7 von II weniger, können 3 von I mehr fahren; folglich 1 + 3 = 4 Passagiere von I, 148 — 7 = 141 Passagiere von II, 214 — (141 + 4) = 69 Passagiere von III; (384 + 9024 + 2760 = 12168 Sgr.). Ferner 4 + 3 = 7 von I; 141 — 7 = 134 von II; 214 — (134 + 7) = 73 von III. So geben die folgenden Verhältnisse: 10, 127, 77; 13, 120, 81; 16, 113, 85; 19, 106, 89; 22, 99, 93; 25, 92, 97; 28, 85, 101; 31, 78, 105; 34, 71, 109; 37, 64, 101 u. s. f. noch 9 mögliche Verhältnisse, da 7 in 64 noch 9 Abzüge erlaubt; 7 in 148 = 21 + dem Isten Verhältnisse, also 22 mögliche Verhältnisse.

3) Viele dieser diophantischen Gleichungen lassen sich mit Hülfe der **Kettenbrüche** lösen (s. o. S. 34 — 36). Zähler und Nenner der convergirenden Brüche werden um so größer, je mehr Glieder des Kettenbruches genommen werden. Die Differenz zweier auf einander folgender Glieder wird aber immer kleiner, je näher man dem vollständigen Kettenbruche rückt. Alle Brüche im Kettenbruche haben gleiche Zähler; um den Werth der Zähler der Differenzen zu finden, bestimmt man den Zähler **einer** Differenz unmittelbar; er ist = + 1 oder — 1; und zwar + 1, wenn man einen convergirenden Bruch geraden Ranges (gleicher Anzahl von Brüchen) von dem benachbarten abzieht; und — 1, wenn man einen Bruch ungeraden Ranges von dem nächstfolgenden abzieht. So sind in dem Beispiele S. 36, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ die Differenzen $\frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{1}{14}$; $\frac{3}{7} - \frac{16}{37} = -\frac{1}{259}$; $\frac{16}{37} - \frac{115}{266} = \frac{1}{9842}$; $\frac{115}{266} - \frac{246}{569} = -\frac{1}{151354}$.

a) In einer Gleichung x und y ist der Coëfficient von y negativ, und das bekannte Glied aa) = + 1. Z. B. **37 x — 89 y = 1**. Jedes Glied durch **89 x** dividirt, giebt $^{37\,x}/_{89\,x}$ — $^{89\,y}/_{89\,y}$ = $^1/_{89}$ x oder $^{37}/_{89}$ — $^y/_x$ = $^1/_{89}$ x; folglich ist $^y/_x$ ein Bruch der Art, daß, wenn man ihn von dem Bruche $^{37}/_{89}$ abzieht, der herauskommende Bruch 1 zum Zähler hat. Dieser Bruch wird durch Verwandlung von $^{37}/_{89}$ in einen Kettenbruch gefunden, indem man das letzte Glied wegläßt, und die übrigen Glieder des Kettenbruches in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt. Zieht man diesen von dem vollständigen Bruche ab, dann wird der Zähler des herauskommenden Bruches + 1, wenn die Anzahl der Glieder des Kettenbruches eine ungerade ist; — 1, wenn die Anzahl eine gerade ist. Bei + 1 kann man den Bruch sogleich für $^y/_x$ nehmen; bei — 1 vermehrt man die gerade Zahl der Glieder um $^1/_1$, und nimmt dem vorhergehenden Nenner 1 ab. Z. B. $^{37}/_{89}$ = $^1/_2$ + $^1/_2$ + $^1/_2$ + $^1/_7$; 4 Glieder, also gerade; ein 5tes wird, als $^1/_1$, angehangen; aus $^1/_7$ wird $^1/_6$, das 5te wird weggenommen, und es entsteht $^1/_2$ + $^1/_2$ + $^1/_2$ + $^1/_6$; verwandelt in einen gewöhnlichen Bruch (s. o. S. 36) giebt $^{32}/_{77}$ = $^y/_x$; also y = 32, x = 77. Für diese Werthe kann man nun noch viele andere finden, wenn man den Werth von x um ein Vielfaches (u) des Coëfficienten von y, und den Werth von y um ein gleich Vielfaches des Coëfficientrn von x vermehrt oder vermindert; hier z. B. **77 + 89 u** und **32 + 37 u**; also **37 . (77 + 89 u) — 89 . (32 — 37 u) = (37 . 77 + 37 . 89 u) — (89 . 32 — 89 . 37 u) = 37 u . 77 — 89 u . 32 = + 1**; d. i. **6142 — 6141** [als **2849 + 3293) — (2848 — 3293)] = 2849 — 2848 = + 1**. Setzen wir u = 2, da 32 in 37 nur einmal enthalten ist, dann ist **9435 — 9434** [als **(2849 + 6586) — (2848 — 6586)] = 5698 — 5696**. bb) Das bekannte Glied ist = — 1; z. B. **17 x — 45 y = — 1**; also $^{17}/_{45}$ — $^y/_x$ = — $^1/_{45}$ x; $^{17}/_{45}$ giebt im Kettenbruche $^1/_2$ + $^1/_1$ + $^1/_1$ + $^1/_1$ + $^1/_5$; 5 Glieder, also für $^1/_5$ wird $^1/_4$ + $^1/_1$ genommen, und das 6te Glied weggelassen; dieser Kettenbruch giebt gelöset $^{14}/_{37}$ = $^y/_x$. cc) Ist der Coëfficient von x größer als der des negativen y, dann muß zu dem gefundenen Bruche $^y/_x$ auch die ganze Zahl (der erste Quotient als ganze Zahl, nicht als Bruch) genommen werden. Nehmen wir das Beispiel von S. 155, Verwechselung von Kronthaler in Preußische Thaler. $54x - 35y = 1$; $^{54}/_{35}$ giebt $1 + {}^{1}/_{1} + {}^{1}/_{1} + {}^{1}/_{5} + {}^{1}/_{3}$; 4 Glieder, gerade, also für $^{1}/_{3}$ wird $^{1}/_{2} + {}^{1}/_{1}$ gesetzt, $^{1}/_{1}$ weggelassen, giebt $1 + {}^{13}/_{24} = {}^{37}/_{24} = {}^{y}/_{x}$. ($x = 24 . 54 = 1296$, $y = 37 . 35 = 1295$, Differenz $= 1$; oder $24 . 162 = 3888$, $37 . 105 = 3885$, Differenz $= 3$). dd) Ist das bekannte Glied eine ganze — oder + Zahl, dann werden die für y und x gefundenen Werthe mit dieser multiplicirt. Nehmen wir das Beispiel von S. 156, Verkauf von Wein gegen Zucker, $155x - 39y = -7$; $^{155}/_{39}$ giebt im Kettenbruche $3 + {}^{1}/_{1} + {}^{1}/_{38}$, das letzte Glied weggenommen, giebt $3 + {}^{1}/_{1} = {}^{4}/_{1} = {}^{y}/_{x}$; $y = 4 . 7 = 28$, $x = 1 . 7 = 7$ ($28 . 39 = 1092$; $7 . 155 = 1085$, Differenz $= 7$).

Z. B. Zwei Zahlen werden gesucht, von welchen die größere durch 43, die kleinere durch 67 theilbar, und deren Differenz $= 13$ ist. $43x - 67y = 13$; $^{43}/_{67}$ giebt $^{1}/_{1} + {}^{1}/_{1} + {}^{1}/_{1} + {}^{1}/_{3} + {}^{1}/_{1} + {}^{1}/_{4}$; 6 Glieder, gerade, also aus $^{1}/_{4}$ wird $^{1}/_{3} + {}^{1}/_{1}$, das 7te Glied weggelassen; reducirt $= {}^{34}/_{53} = {}^{y}/_{x}$; $y = 34 . 13 = 442$, $x = 53 . 13 = 689$, oder $y = 442 + 43u$, $x = 689 + 67u$; setzen wir $u = 10$, da 43 in 442 nur 10 mal enthalten ist, dann ist $y = 442 - (10 . 43) = 12$, $x = 689 - (10 . 67) = 19$; also $43 . 19 = 817$ ($: 43 = 19$) und $67 . 12 = 804$ ($: 67 = 12$).

b) Sind die Coëfficienten beider Unbekannten und das bekannte Glied positiv, dann sucht man auf obige Art den Werth von x und y, multiplicirt diese mit dem bekannten Gliede und giebt dann y ein entgegengesetztes Vorzeichen. Z. B. 1000 soll in zwei Theile zerlegt werden, von denen der eine durch 13, der andere durch 33 theilbar ist; $13x + 33y = 1000$; $^{13}/_{33} = {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{1} + {}^{1}/_{1} + {}^{1}/_{6}$; 4 Glieder, also $^{1}/_{2} + {}^{1}/_{1} + {}^{1}/_{1} + {}^{1}/_{5}$, reducirt $= {}^{11}/_{28} = {}^{y}/_{x}$; $y = 11 . 1000 = 11000$, $x = 28000$; oder $y = -11000 + 13u$, $x = 28000 - 33u$; setzen wir $u = 847$ (da $11000 : 13$ nur 846 mal), dann ist $y = -11000 + 13 . 847 = 11$, $x = 28000 - 33 . 847 = 49$; $y = 33 . 11 = 363$, $x = 13 . 49 = 637$.

III. Jede **reine quadratische Gleichung**, also Gleichung vom 2ten Grade mit einer Unbekannten, welche in der 2ten Potenz steht (x^2), läßt sich auf die Form $ax^2 = \pm b$ reduciren. Z. B. $nx^2 + 12 = 4g + 7x^2$; transponirt,

$n x^2 - 7 x^2 = 4 g - 12$, oder $x^2 (n - 7) = 4 g - 12$. Mit literaler Bezeichnung, $n - 7 = a$, und $4 g - 12 = b$; dann ist $a x^2 = b$. Aus dieser Form entwickelt man $x^2 = \frac{b}{a}$, und $x = \sqrt{(\frac{b}{a})}$ oder $x = \pm \sqrt{(\frac{b}{a})}$. Jede reine quadratische Gleichung führt also zur Ausziehung der $\sqrt{}$; außerdem findet man für eine Unbekannte zwei Werthe, von gleichem arithmetischen Werthe und mit entgegengesetzten Zeichen. Die Ausziehung der $\sqrt{}$ s. o. S. 76 u. f., und mit Hülfe der Logarithmen s. o. S. 90; aus Buchstaben s. o. S. 128 u. f.

Es soll z. B. eine Zahl gefunden werden, deren $^2/_3$ mit deren $^5/_7$ multiplicirt, 3360 zum Producte hat. $\frac{2x}{3} \times \frac{5x}{7} = 3360$, oder $\frac{10 x^2}{21} = 3360$; also $10 x^2 = 70560$; $x^2 = 7056$; $x = \sqrt{(7056)} = 84$.

Z. B. L. wird nach seinem Alter gefragt; er antwortet: Wenn man mein Alter vor 9 Jahren mit dem Alter, welches ich in 9 Jahren erreicht haben werde, multiplicirt, dann ist das Product = 1519. $(x - 9) \times (x + 9) = x^2 - 81 = 1519$; transponirt $x^2 = 1519 + 81$, d. i. $x^2 = 1600$; $x = \sqrt{(1600)} = 40$.

Z. B. Es hat Jemand Wein in 3 Fässern. Im ersten Fasse kostet 1 Quartier eben so viel Kreuzer, als Quartiere im Fasse sind; im 2ten Fasse kostet 1 Quartier $^1/_4$ mal so viel, und im 3ten $^1/_3$ mal so viel, als jedes Mal Quartiere im Fasse sind. Die Zahl der Quartiere im 1sten Fasse verhält sich zu der im 2ten = 25 : 32, und die im 2ten Fasse verhält sich zu der im 3ten = 8 : 9. Wenn nun der Wein in den drei Fässern zusammen 87 fl. 32 Kr. Rh. kostet, wie viel Quartiere sind in jedem Fasse? Die Zahl der Quartiere im ersten Fasse = x, dann sind im 2ten Fasse $\frac{32 x}{25}$, und im dritten Fasse $\frac{9}{8} \times \frac{32 x}{25} = \frac{36 x}{25}$. Im ersten Fasse sind x Quartiere, also kostet 1 Quart. x Kreuzer, und x Quart. kosten x^2 Kreuzer. Da das 2te Faß $^{32x}/_{25}$ Quart. enthält, und diese Zahl 4 mal so groß ist, als die Zahl der Kreuzer, welche 1 Quart im 2ten Fasse kostet, so kostet

1 Quartier $^{8x}/_{25}$ Kr., und die $^{32x}/_{25}$ kosten $\frac{8x}{25} \times \frac{32x}{25} = \frac{256\,x^2}{625}$ Kr. $= y$. Im 3ten Fasse sind $^{36x}/_{25}$ Quart., diese Zahl ist 3 mal so groß, als die Zahl Kreuzer, welche 1 Quart. im 3ten Fasse kostet; somit kostet 1 Quart. $^{12x}/_{25}$, und $^{36x}/_{25}$ Quart. kosten $\frac{12x}{25} \times \frac{36x}{25} = \frac{432x^2}{625} = z$. Der Wein in den 3 Fässern kostet 5252 Kr.; demnach $x^2 + \frac{256x^2}{625} + \frac{432x^2}{625} = 5252$; also $625x^2 + 256\,x^2 + 432\,x^2 = 3282500$, d. i. $1313\,x^2 = 3282500$; $x^2 = 3282500 : 1313 = 2500$, folglich $x = \sqrt{(2500)} = 50$; $y = \frac{32x}{25} = 64$, und $z = \frac{36x}{25} = 72$.

Die gemischten quadratischen Gleichungen, welche auch die Unbekannte als x^1 enthalten, lassen sich auf die Form $x^2 + p\,x = q$ reduciren, wo p der Coëfficient von x, und q das bekannte Glied ist. Alle Glieder, welche x^2 enthalten, kann man auf ein einziges reduciren; ebenso alle, welche x^1 enthalten, wie auch alle, welche x gar nicht enthalten. Alle Glieder kann man durch den Coëfficienten von x^2 dividiren, wodurch x^2 von seinem Coëfficienten befreit wird; hat dieses Glied ein — Zeichen, dann kann man jedem Gliede der Gleichung ein + Zeichen geben. Z. B. $12 - \frac{2\,x^2}{3} + 7\,x = a\,x^2 - \frac{5\,x}{9} + b$; hier ist $108 - 6\,x^2 + 63\,x = 9\,a\,x^2 - 5\,x + 9\,b$; transponirt, $-6\,x^2 - 9\,a\,x^2 + 63\,x + 5\,x = 9\,b - 108$; demnach $-(6 + 9\,a)\,x^2 + 68\,x = 9\,b - 108$, und $-x^2 + \frac{68}{6+9\,a} \times x = \frac{9\,b - 108}{6 + 9\,a} = \frac{3\,b - 36}{2 + 3\,a}$; also $x^2 - \frac{68}{6+9\,a}$, und $x = -\frac{3b - 36}{2 + 3\,a}$. Setzt man nun $-\frac{68}{6+9\,a} = p$, (gleich dem Coëfficienten von x), und $-\frac{3\,b - 36}{2 + 3\,a} = \frac{3\,b - 36}{2 + 3\,a} = q$, (gleich dem bekannten Gliede) dann hat man die Form $x^2 + p\,x = q$.

Durch Hinzufügung eines von x unabhängigen Gliedes kann man $x^2 + p\,x$ zum vollkommenen □ machen. Z. B. $x^2 + 14\,x$, d. i. $= x^2 + 2\,.\,7\,x$, also = dem □ von x nebst dem doppelten Producte von x mit 7; fügt man das □ von 7 hinzu, dann entsteht $x^2 + 14x + 49$, wofür $(x + 7)^2$ gesetzt werden kann. Um also $x^2 + px$ zum □ zu ergänzen, erhebt man die Hälfte des Coëfficienten von x zum □, und addirt dieses hinzu. Durch diese Ergänzung läßt sich jede gemischte quadratische Gleichung in eine reine quadratische verwandeln und auflösen. Z. B. $x^2 + 14x = 95$; zum □ ergänzt, indem man beiden Theilen der Gleichung + 49 hinzufügt, also $x^2 + 14x + 49 = 95 + 49$; daher $(x + 7)^2 = 144$; $x + 7 = \pm\sqrt{(144)} = \pm 12$, und $x = -7 \pm 12$, also entweder $= -7 + 12$ $(= +5)$, oder $= -7 - 12$ $(= -19)$. Die Unbekannte hat also hier zwei Werthe, deren jeder die Gleichung befriedigt; denn hier ist $5^2 + 14 . 5 = 95$, oder $(-19)^2 + 14 \times -19 = 95$.

Z. B. N. nimmt 1200 ℳ auf Zinsen, zahlt am Ende des ersten Jahres 748 ℳ und am Ende des zweiten Jahres 520 ℳ, durch welche zwei Zahlungen die Schuld völlig getilgt ist. Wie viel Procent war der Zinsfuß? Der Zinsfuß sei x %, dann war die Schuld nach Ablauf des ersten Jahres $1200 + 12x$, und nach Abzahlung von 748 ℳ war sie $1200 + 12x - 748 = 452 + 12x$; und nach Ablauf des zweiten Jahres $452 + 12x + (452x : 100) + (12x^2 : 100)$; da sie nun mit 520 ℳ getilgt ist, hat man die Gleichung

$$452 + 12x + \frac{452x}{100} + \frac{12x^2}{100} = 520;$$

daher $45200 + 1200x + 452x + 12x^2 = 52000$; $12x^2 + 1652x = 52000 - 45200 = 6800$; $x^2 + (1652x : 12) = (6800 : 12)$; $x^2 + (413x : 3) = (1700 : 3)$; $x^2 + (413x : 3) + (170569 : 36) = (1700 : 3) + (170569 : 36) = (190969 : 36)$; $[x + (413 : 6)]^2 = (190969 : 36)$; $x + (413 : 6) = \pm\sqrt{(190969 : 36)}$; $x = -(413 : 6) + \sqrt{(190969 : 36)} = -(413 : 6) + (437 : 6) = -68\frac{5}{6} + 72\frac{5}{6} = 4$ Procent.

Z. B. Das Lebensalter Sr. Majestät, des Kaisers von Oesterreich, Ferdinand I., und dasselbe Sr. Majestät, des Königs von Sachsen, Friedrich August, algebraisch zu finden:

Erhebt man das Lebensalter Sr. Kaiserlichen Majestät zum Quadrate, und ebenso das Lebensalter Sr. Königlichen Majestät, und addirt beide Quadrate, dann entsteht die Zahl 4058; subtrahirt man beide Quadrate von einander, dann bleibt die Zahl 360. $x^2 + y^2 = 4058$ und $x^2 - y^2 = 360$; subtrahirt, $(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2) = 2y^2$, demnach $2y^2 = 4058 - 360$ d. i. $2y^2 = 3689$, folglich $y^2 = 1849$, daraus $\sqrt{}$, $y = 43$ Jahre, Se. Königliche Majestät. $x^2 = 4058 - 1849$, d. i. $x^2 = 2209$, daraus $\sqrt{}$, $x = 47$ Jahre, Se. Kaiserliche Majestät. Um zu finden, in welchem Jahre Ihro Majestäten dieses Lebensalter erreicht haben, multiplicire man $\frac{3}{5}$ mit $\frac{3}{80}$ dieser Jahreszahl x, dividire dann das Product mit 6, und es entsteht die Zahl 12696.

Hier ist $\frac{3}{5}x \times \frac{3}{80}x = 12696$; $\frac{3}{5} \times \frac{3}{80} = \frac{9}{400}x^2$; dividirt durch $6 = \frac{3}{800}x^2$; demnach $\frac{3}{800}x^2 = 12696$; auf beiden Seiten mit 800 multiplicirt, giebt $3x^2 = 10156800$, folglich $x^2 = 3385600$, daraus $\sqrt{}$, $x = 1840$.

Tiefer in die Analytik der quadratischen und höheren Gleichungen einzugehen, liegt außer dem Plane dieser Blätter. — Es mögen hier zuletzt noch ein Paar Beispiele folgen, welche sich durch Formeln lösen lassen, nach denen ähnliche Formeln zu vielen verwandten Beispielen gebildet werden können.

Z. B. M. und Z. wollen zusammen ein Faß Wein von 180 (a) Quart. leeren. Wenn M. allein getrunken hätte, dann würde er 16 (n) Tage länger getrunken haben, als wenn beide zusammen getrunken hätten; wenn aber Z. allein getrunken hätte, dann würde er 25 (m) Tage länger getrunken haben, als wenn beide zusammen getrunken hätten. Wie viel Quart. trank jeder täglich?

$$Z. = \frac{a\,(n \pm \sqrt{n\,m})}{(n - m)\,n} \quad M. = \frac{a\,(m \mp \sqrt{n\,m})}{(m - n)\,m}.$$

$(\sqrt{n\,m})\ 20 + (n)\ 16 = 36 \times (a)\ 180 = 6480 : (n - m = 16 - 25) - 9 \times (n)\ 16 = -144 = 45 : 180 = 4$ Quart. Z.; und M. $(20 + 25 = 45 \times 180) = 8100 : (25 - 16 = 9 \times 25 =)\ 225 = 36 : 180 = 5$ Quart. Hier ergeben auch die Wurzeln der beiden Differenzgrößen 16 und 25, 4 und 5, unmittelbar die Anzahl der täglich getrunkenen Quartiere.

Z. B. Die Summe von drei Zahlen x, y, z beträgt 53 (a); die Summe ihrer Quadrate 969 (b); wenn man aber zu der Summe von x und z 13 (c) addirt, dann erhält man das Doppelte der Zahl y. Welche Zahlen sind x, y, z? y wird leicht gefunden durch $y = \frac{a + c}{3}$ d. i. $\frac{53 + 13}{3} = 22$; $x = \frac{2a - c + \sqrt{3(6b - 2a^2 - c^2)}}{6} = 17$; und $z = \frac{2b - c - \sqrt{3(6b - 2a^2 - c^2)}}{6} = 14$; $x = (2a - c =)\ 93 + (\sqrt{5814 - 5018} = 196, - 169 = 27, \times 3 = 81$, daraus $\sqrt{\ }, 9)\ 9 = 102 : 6 = 17$; $z = 93 - 9 = - 84 : 6 = 14$.

Diese Formel wollen wir zur Lösung einer interessanten Aufgabe anwenden:

Den Geburtstag Sr. Majestät, des Königs Ernst August, und Ihrer Majestät, der Königinn Friederike Caroline Sophie Alexandrine, imgleichen den Geburtstag Sr. Königlichen Hoheit, des **Kronprinzen Georg Friedrich Alexander Carl Ernst August von Hannover** durch eine quadratische Gleichung mit drei Unbekannten zu finden:

Die Anzahl der Tage im Jahre vom ersten Januar bis incl. des Geburtstages Sr. Majestät, ebenso die Anzahl Ihrer Majestät, und ebenso Sr. Königlichen Hoheit, geben die Summe **364**. Erhebt man diese Tagessummen einzeln zum Quadrate, dann ist die Summe der drei Quadrate $= 49666$. Wenn man von der Summe der Anzahl der Tage vom 1sten Januar bis incl. des Geburtstages Sr. Majestät und Sr. Königlichen Hoheit 181 subtrahirt, dann erhält man das Doppelte jener Tage-Anzahl, welche den Geburtstag Ihrer Majestät bezeichnet.

Nennen wir die erste Summe x, die zweite y und die dritte z, dann haben wir die drei Gleichungen $x + y + z = 364\ (= a)$; $x^2 + y^2 + z^2 = 49666\ (= b)$; $x + z - 181 = 2y\ (= c)$; $x = \frac{2a + c + \sqrt{3[6b - 2a^2 - c^2]}}{6} = 156$ste Tag = 5te Junius, Geburtstag Sr. Majestät.

$y = \frac{a - c}{3} = 61$ste Tag = 2te März, Gebtg. Ihrer Majestät.

$z = \frac{2a + c - \sqrt{3[6b - 2a^2 - c^2]}}{6} = 147$ste Tag = 27ste Mai, Geburtstag Sr. Königlichen Hoheit.

$x = (364 \,.\, 2 + 181 =)\ 909 + [\sqrt{(49666 \,.\, 6 =)\ 297996}$

— ($364^2 . 2 =$) $264992 = 33004$ — ($181^2 =$) $32761 = 243$, . $3 =$) $729] 27 = 936, : 6 = 156$ste Tag. $y = 364 - 181 : 3 = 61$ste Tag, und $z = 909 - 27 : 6 = 147$ste Tag.

Zum Schluß wollen wir die Geburtsjahre dieser erhabenen Monarchen, ebenfalls durch quadratische Gleichung, finden.

Die Jahreszahl (x) des Geburtsjahres Sr. Majestät giebt, mit der Zahl (y) des Geburtsjahres Ihrer Majestät multiplicirt, das Product 3148838; x mit der Zahl (z) des Geburtsjahres Sr. Königl. Hoheit multiplicirt, giebt 3221449; und $y \times z = 3234182$. Welches sind die Zahlen für x, y und z?

$$x = \sqrt{\frac{xy \times xz}{yz}};\ y = \sqrt{\frac{xy \times yz}{xz}};\ z = \sqrt{\frac{xz \times yz}{xy}}.$$

ausgeführt, $x = \sqrt{\frac{3148838 \times 3221449}{3234182}} = 1771$; $y = \sqrt{\frac{3148838 \times 3234182}{3221449}} = 1778$; $z = \sqrt{\frac{3221449 \times 3234182}{3148838}} = 1819$. Die Ausführung dieser großen Multiplicationen, Divisionen und Wurzelausziehungen geschieht leicht mit Hülfe der Logarithmen (s. o. S. 87 — 90).

$$\begin{array}{rl} 3148838 = & \text{Lg. } 6{,}4891503 + \\ 3221449 = & \text{Lg. } 6{,}5080513 \\ \hline & \phantom{\text{Lg. }}13{,}0062016 - \\ 3234182 = & \text{Lg. } 6{,}5097644 \\ \hline & 2 : 6{,}4964372 \mid 3{,}2482186 = \text{N. } 1771. \end{array}$$

Ebenso werden y und z behandelt.

Die Ausführung der Gleichungen auf unserer Tafel bedarf hier keiner weiteren Exposition. Wer sich die Mühe gab, von den hier beschriebenen leichteren zu den schwierigeren Rechnungsarten practisch aufzusteigen, und namentlich die Ausführung der Buchstabenrechnung zu üben, wird hier auf kein Hinderniß stoßen.

Anwendung der Tafel zur Bildung geradliniger geometrischer (planimetrischer) Figuren, mit Buchstabenbezeichnung.

Die Bezeichnung der eine geometrische Figur umgrenzenden und ihr Inneres theilenden Linien geschieht auf unserer Tafel mit Hülfe eines feinen Bindfadens. Die Winkel der Figur werden durch, am richtigen Orte auf der (von allen übrigen Knöpfen befreiten) Tafel eingesteckte große oder Spitz-Nadeln bezeichnet; um diese herum schlingt man den Faden, ein oder zwei Mal, und führt ihn in der Richtung fort, welche die, die Figur umgrenzenden Linien erfordern; ebenso bildet man die Theilungen und Hülfslinien im Innern der Figur, und die Verlängerung solcher Linien außerhalb derselben. — Zur Bezeichnung der Winkel und Endungen der Linien werden in diesen Puncten an den dort befindlichen großen Nadeln, welche als Primknöpfe gelten, die Bezeichnungen der Buchstaben mit 2 kleinen Nadeln angesteckt. Kommen große und kleine Buchstaben untereinander in einer Figur vor, dann nimmt man zur Bezeichnung der großen, Spitznadeln als Primknöpfe, und fügt an sie 2 große oder 2 kleine glatte Nadeln. — Soll die Seite oder Ebene einer Figur mit einem Buchstaben bezeichnet werden, dann wird hier ein entsprechender Primknopf mit 2 Nadeln angesteckt. — Die Lehren von den geraden Linien und Winkeln, die Eigenschaften, die Congruenz und die Aehnlichkeit der Dreiecke, der Vierecke und mehrerer Vielecke, und die Flächenräume geradliniger ebener Figuren lassen sich völlig genügend auf diese Weise durchführen. Nur die Kreislinie und ihre Verbindungen mit der geraden Linie, und die Stereometrie (Lage der Linien und Ebenen, prismatische Räume, Pyramide, Cylinder, Kugel, Polyëder und Kegel) lassen sich nicht auf dieser Tafel darstellen.—Jedoch kann man auf ihr Kreisfiguren durch einen kreisförmig gebogenen Drath mit zwei rechtwinklig abgebogenen, in zwei Löcher der Tafel zu steckenden Spitzen bilden, an welchem Buchstaben mit quadratischer Schrift angesteckt werden können. Linien im und am Kreise sind dann durch Bindfaden, mit Buchstabenbezeichnung zu bilden. — Ueber die Nachbildung planimetrischer Figuren durch Nadeln und Schnur auf einem Polster, s. unseres Nestors »Klein Unterricht des Blinden, 1819, S. 249 u. f.«

Anwendung der Tafel zum Lesen und Schreiben mit quadratischen Schriftzeichen.

Die Elemente der Sprache, die Laute, sollen (von uns Sehenden dem Auge sichtbar, so) dem Blinden durch Lautzeichen, mit Hülfe des Tastsinnes, zur inneren Anschauung gebracht werden; die Gehörsprache wird ihm dadurch Tastsprache, (wie uns Gesichtsprache, als die dem Auge sichtbar gewordene Gehörsprache). **Lesen** heißt also: die Geschicklichkeit, aus der Tastsprache (Gesichtsprache) in die Gehörsprache zu übersetzen; und **Schreiben**: die Gehörsprache in die Tastsprache (Gesichtsprache) zu übertragen; oder: seine Gedanken und Empfindungen in fühlbaren (sichtbaren), bestimmten und verständlichen Zeichen ausdrücken, welche durch Lesen wieder in die Gehörsprache übertragen werden. — Die Orthographie lehrt die Gesetze der Schriftsprache.

Man lehrte und lehrt in vielen Blinden-Unterrichts-Anstalten das mühsame Schreiben mit Bleistift, oder mit Metallstift durch geschwärztes Papier, auf weißem Papiere, und hat dazu mancherlei Hülfsmaschinen erdacht. Auch Verf. hat aus vielen, auf seinen Reisen, in andern Anstalten gesehenen Maschinen dieser Art, die zweckmäßigsten Einrichtungen gewählt, und daraus eine, wohl ziemlich allen Anforderungen entsprechende **Schreibmaschine** zusammengesetzt; er hat auch eine kleinere, ziemlich vollkommene Schreibmaschine verfertigt, welche der Blinde bequem in der **Tasche** führen, auf jedem Sophakissen, gepolsterten Stuhle u. dgl. mittelst 4 langen Knopfnadeln mit dem untergelegten Papiere in Verbindung setzen kann, und mit welcher letzterer, ohne Hülfe eines Sehenden, viele Reihen untereinander, mit Bleistift oder Metallstift zu schreiben im Stande ist. Indessen hat Verf. nur in den ersten Jahren seines Unterrichtsamtes seine Zöglinge mit diesem Schreiben gemartert, und hat mehrere zu einer leserlichen und correcten Handschrift gebracht, (wovon noch Probeschriften vorliegen). Späterhin wandte er diese Strichelei nur zur Uebung der Finger an; seit Jahren ist er aber völlig davon abgekommen, die Kleinen mit einer wenig nützenden Uebung zu ermüden und unlustig zu machen. Erwachsene, gebildete Blinde, besonders in späteren Jahren Erblindete, mögen diese ihnen nur in seltenen Lebensconjuncturen nützliche Beschäftigung lernen. — Der **Hauptgrund**, warum der Blinde das Schreiben mit Bleistift nicht liebgewinnen kann, ist: daß er das Gefertigte nicht wieder zu erkennen im Stande ist. — Schreibt man, stark drückend, mit einem Metallstifte auf, zwischen zwei Lagen reinen, elastischen Papieres sich befindenden geschwärzten

Papiere, dann entsteht auf dem unteren reinen Papiere, aufwärts, die schwarze, für Sehende lesbare Schrift; auf der Rückseite dieses Blattes sind die Schriftzeichen verkehrt erhaben; mit großer Mühe und Uebung haben es einige Blinde dahin gebracht, diese verkehrten Züge auf der Rückseite mit den Fingern lesen zu lernen, zumal, wenn die obere Seite mit Gummi oder Leim bestrichen, und dadurch dieses Relief dauerhaft gemacht wurde. — Verf. hat nach einer Erfindung von Wurm in Wien (von welcher Verf. bei dem Herrn Schulrath Klein in Wien ein Modell sah) einen Autographen angefertigt, mit dessen Hülfe der Blinde, mühsam Geschriebenes und gerade relief sich Darstellendes, mithin wieder Lesbares, zu Stande bringen kann. Indessen sind alle diese Hülfsmittel mühsam und unsicher; ein etwas unrichtiger Zug macht einen nicht wieder zu erkennenden Buchstaben u. s. f. — Aus diesen Gründen wurde in hiesigem Blinden-Unterrichts-Institute das Schreiben, (als Hülfsmittel zur Erlernung der schwierigen deutschen Orthographie, und als Communicationsmittel zwischen Blinden und Sehenden) mit Hülfe unserer oben beschriebenen Tafel, bei leicht zu überwindenden Schwierigkeiten, seit 7 Jahren mit dem trefflichsten Erfolge ausgeführt.

Zunächst werden die Zahlen (s. o. S. 13 und 14) gelernt, und in Anwendung auf die 4 Grundoperationen des Rechnens geübt; 8 — 10jährige Kinder lernen dieses leicht, mit Lust und Sicherheit in weniger als einem Jahre. Während dieser Zeit wird in anderen Stunden die Reihefolge der Laute in unserem deutschen Buchstabensysteme, die Unterscheidung der Grund- und Mitlaute, und das Syllabiren systematisch eingeübt. Die Preßschrift und Lesefertigkeit derselben wird ohne große Mühe und ohne großen Zeitaufwand ebenfalls gelernt. Nun wird auf unserer Tafel das Lesen und Schreiben zu gleicher Zeit geübt. Zuförderst wird unser Buchstabensystem (s. o. S. 17 und 18) gelernt; und zwar zuerst die Gruppe von a bis incl. g, als der ersten Bildung der Schriftlaute mit der 2; hierbei wird länger verweilt, und nicht eher fortgeschritten, bis jeder Schriftlaut auch außer der Reihe genau und schnell erkannt wird, und vom Zöglinge selbst gemacht werden kann; zugleich werden kleine Zusammensetzungen mit diesen 7 Zeichen, als ba — de, af — fe, ga — be, ce — ba u. s. f. gebildet und geübt. Von Anfang an wird jedes Lautzeichen mit seinem mathematischen Werthe, als Doppelzahl (z. B. a = 23, g = 29 u. s. f.) ausgesprochen, so daß sich diese Doppelzahl, als eine andere, gleichbedeutende Bezeichnung des Lautzeichens, fest einprägt. Die 6 folgenden Zeichen, h bis incl. n, als Bildung mit der 3, werden im zweiten Lern-Absatze vorgenommen. Aus diesen 13 Buchstaben werden nun mannigfache einfache und zusammengesetzte Wörter gebildet; o bis s, und t bis w bilden den dritten Absatz. Viele Schüler üben, nun schon vertraut mit der Entwickelung unseres Schriftzeichen-Systemes, auf eigene Hand den Rest von x bis incl. ü. — Zwischen jedem Worte bleibt ein freier Knopf als Trennungszeichen. — Nach 12 bis 15 Unterrichtsstunden sind die fähigeren Zöglinge schon sicher in Unterscheidung der Lautzeichen, können ein- und mehrsylbige Wörter selbst schreiben und lesen, und wissen die jedem Zeichen zugehörende Doppelzahl. Zur ferneren Uebung im Schreiben und Lesen werden nun systematisch geordnete Wörter (Wortschatz No. I., Preßschrift) gelesen, und auf der Tafel mit quadratischer Schrift geschrieben; dann folgen die Homonymen und Paronymen (Wortschatz No. II.) und endlich die Synonymen (Wortschatz No. III.), wobei stets auf reine Aussprache, auf Abstammung und Verwandschaft und auf den Schreibgebrauch, neben der Begriffserklärung aufmerksam gemacht wird. — Nun werden die Interpunctionszeichen (s. o. S. 18 und 19) gelernt, und dann Sätze aus unseren chronologischen Tabellen der Weltgeschichte, dem Handbuche der Geographie, dem Leitfaden zum Religionsunterrichte ꝛc. (alle in Preßschrift) copirt; und endlich dictirte Sätze geschrieben, gelesen und corrigirt. — Daß die Mehrzahl der Schüler nach 1 bis $1^1/_2$ Jahren einen selbstständig gebildeten Satz schreiben kann, bedarf kaum einer Erwähnung, da während dieser Lernperiode in anderen Stunden die Redetheile, ihre Flection und Rection, und die Constructionslehre in der Kürze durchgenommen und practisch verarbeitet werden.

Zur Bezeichnung der großen Buchstaben wird am zweckmäßigsten eine Spitznadel in die eine, und eine kleine Nadel in die andere Zahlstelle gesetzt; die Interpunctionszeichen werden dann durch Hinzufügung einer großen glatten Nadel zur glatten Primnadel bezeichnet. — Die Anwendung der großen Lautzeichen im Anfange eines Satzes, bei Substantiven und Anredewörtern, (welche eine neuere, vielleicht richtigere Orthographie fast verbannt), gewährt dem des Ueberblickes entbehrenden Blinden manche Erleichterung; er weiß sogleich bei Berührung des ersten Buchstabens eines Wortes, daß dieses in eine jener Classen gehört. Leicht unterscheidet er, ohne aus dem, von ihm schwieriger zu erfassenden Zusammenhange erst schließen zu müssen, ob Gebet oder gebet, Grabe oder grabe, Liebe oder liebe, Pflege oder pflege, Weise oder weise u. s. f. vorliegt.

Daß auch die Französische, Englische und Italienische Sprache (s. o. S. 19 und 20) auf diese Weise erlernbar sind, wie auch, daß der Blinde auf einem Täfelchen von der Größe eines Quartblattes (in Buchform leicht führbar, mit 2646 Löchern, worauf also 294 Buchstaben Platz finden) sich Namen, Zahlen, Sätze zu notiren im Stande ist, welche er nach Belieben wieder lesen kann, bedarf nur einer Erwähnung.

Die Orthographie, bei welcher das Meiste ein Herkömmliches, ein Gebrauch ist, dessen Grund in vielen Fällen Niemand anzugeben, wenigstens nicht der Fassungsgabe eines Schülers angemessen nachweisen kann*) wird auf diese Weise rein practisch, durch die Verbindung der Lese- mit den Schreibe-Uebungen erlernt. Das Ohr allein reicht hier nicht aus; jedes Wort hat in der Schriftsprache seine eigene Physiognomie; diese muß der Lernende erfassen; (der Sehende schnell mit dem Auge) der Blinde (langsamer) mittelst des Tastsinnes. So wie der Leseunterricht Lesefertigkeit schafft, so daß die einzeln gelernten Lautzeichen nun in den Wörtern zu einem Ganzen erfaßt werden, ohne jedesmal die Lautzusammensetzung analysiren zu brauchen; wie der Spieler eines musicalischen Instrumentes, bei geübtem

*) Ueber die Schwierigkeiten für Lehrer wie für Schüler, beim Unterrichte über unsere deutsche Orthographie s. Diesterweg, pract. Lehrgang Th. I. p. 21; Dessen Wegweiser, p. 371. Harnisch, vollständiger deutscher Sprachunterricht, p. 33. Wander, Uebungsschule, Th. I. p. 13. Wurst, Sprachdenklehre, p. 378; und einige Vorschläge zur Abhülfe dieser Schwierigkeiten, s. Wolke, deutsche Gesammtsprache; Sprachfehler-Berichtigung, Ziehnert, Denksprüche, und Greßler, Orthographie.

Spiele, sich nicht jeder einzelnen Note erinnert, sondern die regelrechte (orthographische) Stellung und Folge der Töne zu einem Ganzen in einem Satze hervorbringt; so muß auch das Schreiben nach dem Schriftgebrauche durch Uebung zur Fertigkeit werden. Durch häufiges Lesen und Abschreiben systematisch geordneter und reichhaltiger Wort- und Satzsammlungen wird dem Blinden die Physiognomie der einzelnen Wörter durch den Tastsinn eingeprägt. Daß dieses bei ihm schwieriger ist, als bei dem glücklicheren Sehenden, wird Jedermann einsehen, der sich die Mühe giebt, nur einmal darüber nachzudenken, wie viele Kenntnisse wir Sehenden der »Nachahmung des Gesehenen« und dem »vergleichenden Ueberblicke« verdanken. Der Tastsinn ist zu materiell, als daß er geistig schnell wie die Lichtentwickelung im Auge sein könnte; der Blinde muß jedes Lautzeichen einzeln erfühlen und aus der Zusammensetzung derselben das Wort und den damit verknüpften Begriff bilden. — Den unzweideutigsten Beweis, daß die Uebung im Erfassen der Wort-Physiognomie am schnellsten zur richtigen Orthographie führt, liefern unsere Taubstummen; sie werden leicht durch systematische Schreibübungen dahin gebracht, orthographisch richtig zu schreiben, ohne je theoretischen Unterricht in der Orthographie genossen zu haben, indem sie von Anfang an die Physiognomie jeden Wortes mit dem Auge erfassen, damit den, freilich oft mühsam entwickelten Begriff desselben verknüpfen, und dann die fest eingeprägte Contur des Wortes auf dem Papiere zeichnen, wenn sie den Begriff durch Schreiben (der Malerei verwandt) wiedergeben wollen.. So lernt der Schüler auch Französisch, Englisch, Italienisch u. s. f., ohne Quälerei mit der theoretischen Orthographie.

Unsere Zöglinge bekommen nie ein falsch geschriebenes Wort unter die Finger; stets werden ihnen die richtigen Wortbilder eingeprägt, die sie durch Schreiben auf unserer Tafel gleichsam wieder schaffen. — Einzelne Sprüche, Verse, kleine Gedichte, welche oft und genau in diesem Bezuge durchgenommen werden, sind mnemonische Hülfsmittel, an welche bei vorkommendem Irrthume erinnert wird. — Daß die Kenntniß der Rechtschreibung, auch für den Blinden, nützlich und nothwendig ist, kann, nach genauer mehrseitiger Erwägung, wohl nicht abgeleugnet werden; doch ist hier nicht der Ort, dieses Thema ausführlich abzuhandeln. —

Genug, klar ist es, daß unsere Entdeckung der Buchstabenschrift auf dieser Tafel dem Blinden ein wesentliches, bisher fehlendes Hülfsmittel zur Kenntniß aller Schwierigkeiten unserer und anderer Sprachen gewährt; und daß namentlich die bisher noch nicht überwundene Schwierigkeit des Selbst-Wiederlesens des Geschriebenen durch diese Tafel gehoben ist.

Daß mit Hülfe unserer quadratischen Schrift eine Correspondenz zwischen Blinden leicht ausführbar ist, indem der eine einem sehenden Kinde, weches Zahlen zu schreiben verstehen muß, die unsern Lautzeichen entsprechenden Doppelzahlen zu Papier dictirt, welche dann ein Sehender dem empfangenden Blinden vorlieset, ohne daß einer der Sehenden von dem Inhalte des Schreibens Kunde hat, bedarf nur der Erwähnung (s. o. S. **10**). Der Empfänger, wenn er nicht im Combiniren der in Doppelzahlen ausgedrückten Buchstaben sehr geübt ist, kann auf seiner Tafel den Brief, dem Sehenden unlesbar, schreiben, und nach Belieben wiederlesen. — Wie leicht Blinde zu dieser Fertigkeit gelangen, mag ein Schreiben beweisen, welches ein nun schon verstorbener **15**jähriger Zögling (von Jugend auf am schwarzen Staare und dabei, wie fast in allen solchen Fällen, an Convulsionen leidend, und deshalb nur ¼ Jahr Probezögling), nach dem nothwendigen Rücktritte aus unserer Anstalt in seine Familie, an seinen hiesigen blinden Lehrer ergehen ließ:

L i e b e r L e h r e r ,
37, 35, 27, 24, 27, 48 — 37, 27, 34, 48, 27, 48 — 5 —

N o c h r e c h t o f t g e-
39, 45, 25, 34 — 48, 27, 25, 34, 56 — 45, 28, 56 — 29, 27-

d e n k e i c h d e r f r o h e n
26, 27, 39, 36, 27 — 35, 25, 34 — 26, 27, 48 — 28, 48, 45, 34, 27, 39

S t u n d e n , w e l c h e i c h
— 49, 56, 57, 39, 26, 27, 39 — 5 — 59, 27, 37, 25, 34, 27 — 35, 25, 34

b e i I h n e n v e r l e b t e
— 24, 27, 35 — 35, 34, 39, 27, 39 — 58, 27, 48, 37, 27, 24, 56, 27

. W e n n i c h n u r n i c h t
— 6 — 59, 27, 39, 39 — 35, 25, 34 — 39, 57, 48 — 39, 35, 25, 34, 56

s o w e i t e n t f e r n t
— 49, 45 — 59, 27, 35, 56 — 27, 39, 56, 28, 27, 48, 39, 56 —

w ä r e , s o w ü r d e i c h
59, 78, 48, 27 — 5 — 49, 45 — 59, 89, 48, 26, 27 — 35, 25, 34

S i e b i t t e n , m i c h
— 49, 35, 27 — 24, 35, 56, 56, 27, 39 — 5 — 38, 35, 25, 34 —

n o c h z u w e i l e n A n-
39, 45, 25, 34 — 69, 57, 59, 27, 35, 37, 27, 39 — 23, 39-

t h e i l a n I h r e n l ä n d-
56, 34, 27, 35, 37 — 23, 39 — 35, 34, 48, 27, 39 — 37, 78, 39, 26-

l i c h e n P a r t h i e u n e h-
37, 35, 25, 34, 27, 39 — 46, 23, 48, 56, 34, 35, 27, 39 — 39, 27, 34-

m e n z u l a s s e n . W i e
38, 27, 39 — 69, 57 — 37, 23, 49, 49, 27, 39 — 6 — 59, 35, 27,

g e h t e s d e n n m e i n e m
— 29, 27, 34, 56 — 27, 49 — 26, 27, 39, 39 — 38, 27, 35, 39, 27, 38

F r e u n d e W o l t e r s ?
— 28, 48, 27, 57, 39, 26, 27 — 59, 45, 37, 56, 27, 48, 49 — 3 —

A u f I h r e n R e i s e n
23, 57, 28 — 35, 34, 48, 27, 39 — 48, 27, 35, 49, 27, 39 —

s c h e i n e n S i e m i c h
49, 25, 34, 27, 35, 39, 27, 39 — 49, 35, 27 — 38, 35, 25, 34 —

v e r g e s s e n z u h a b e n
58, 27, 48, 29, 27, 49, 49, 27, 39 — 69, 57 — 34, 23, 24, 27, 39

! M i t d e r B i t t e ,
— 9 — 38, 35, 56 — 26, 27, 48 — 24, 35, 56, 56, 27 — 5 —

m i c h d e m H e r r n D o c-
38, 35, 25, 34 — 26, 27, 38 — 34, 27, 48, 48, 39 — 26, 45, 25-

t o r b e s t e n s u n d g e-
56, 45, 48 — 24, 27, 49, 56, 27, 39, 49 — 57, 39, 26 — 29, 27-

h o r s a m s t z u e m p f e h-
34, 45, 48, 49, 23, 38, 49, 56 — 69, 57 — 27, 38, 46, 28, 27, 34-

l e n , b i t t e t u m I h-
37, 27, 39 — 5 — 24, 35, 56, 56, 27, 56 — 57, 38 — 35, 34-

r e f e r n e r e F r e u n d-
48, 27 — 28, 27, 48, 39, 27, 48, 27 — 28, 48, 27, 57, 39, 26-

s c h a f t
49, 25, 34, 23, 28, 56 —

I h r
35, 34, 48

I h n e n m i t L i e b e
35, 34, 39, 27, 39 — 38, 35, 56 — 37, 35, 27, 24, 27 —

e r g e b e n e r
27, 48, 29, 27, 24, 27, 39, 27, 48

T h e o d o r N i k o l a i
56, 34, 27, 45, 26, 45, 48 — 39, 35, 36, 45, 37, 23, 35 —

D a r f i c h a u c h w o h l
26, 23, 48, 28 — 35, 25, 34 — 23, 57, 25, 34 — 59, 45, 34, 37

b a l d u m e i n P a a r
— 24, 23, 37, 26 — 57, 38 — 27, 35, 39 — 46, 23, 23, 48 —

Z e i l e n v o n I h n e n
69, 27, 35, 37, 27, 39 — 58, 45, 39 — 35, 34, 39, 27, 39 —

b i t t e n ?
24, 35, 56, 56, 27, 39 — 3 —

Eine Tafel von Folio-Größe enthält 5859 Löcher, somit 651 Zahlenstellen. Dieses Briefchen enthält 534 Buchstaben und Zeichen, ist demnach auf einer solchen Tafel bequem zu schreiben.

Die Anwendung der Tafel zur Kenntniß der Elemente der Musik

erstreckt sich nach Verf. bisherigen Versuchen nur auf die Darstellung der Linien und des Notensystemes, wie der gebräuchlichen musikalischen Bezeichnungen, so daß der Blinde auf diese Art eine Vorstellung der Einrichtung und des Gebrauches der für Sehende gedruckten Noten gewinnt. — Daß für den Blinden nicht mehr vonnöthen ist; daß, nach grammaticalisch gelernten Elementen der Musik, der Blinde leicht das Gehörte, in einzelnen Tacten und Sätzen ihm Vorgespielte, erlernt, und bald, zum harmonischen Ganzen gestaltet, wiedergiebt; daß wir also keiner durch erhabene Schrift lesbar gemachter Notenwerke bedürfen; so wie, daß gründlicher Unterricht im Gesange dem Instrumental-Unterrichte vorangehen und stets daneben betrieben werden muß; darüber dürften die Typlo-Pädagogen einig sein.

Die Versinnlichung der Töne durch Zeichen scheint, da jeder Ton durch einen Buchstaben oder eine Sylbe bezeichnet wird, am natürlichsten durch Buchstaben ausführbar. Die Anwendung dieser hat aber ihre engen Grenzen. Im Jahre 1832 wendeten zwei blinde junge Männer (der sel. C. Lippell, weiland Organist an der St. Petri-Kirche hieselbst, und H. Hieronymi, dessen Nachfolger im Amte) diese Idee auf ein mit Preßschrift gedrucktes Choralbuch an, dessen sie sich späterhin zu ihrem Kirchen-Orgel-Spiele bedienten. Verf. war ihnen behülflich, und druckte das Werkchen (in Quart auf 58 Seiten 124 Choralmelodieen enthaltend) in mehreren (auch Andern gern mitzutheilenden) Exemplaren. Hier ist nur die Singstimme (die Melodie) bezeichnet, keine Begleitung; nur mit Buchstaben, ohne Linien. Ueber jedem Chorale ist die Melodie in Worten angegeben. Die Noten sind durch Buchstaben bezeichnet, und zwar die Noten der eingestrichenen Octave durch große, die der zwei-gestrichenen durch kleine. Jeder Buchstaben gilt eine halbe, zwei durch (=) verbundene eine ganze Tactnote. Ein Punct zeigt ein durchgehendes

Viertel; steht er oben (·), dann ist es höher; unten (.), dann ist es tiefer, als der vorhergehende Ton. Das Komma (,) gilt als halbe Tactpause. Die Tonart ist durch + oder b bezeichnet. Ein Strich zeigt das Ende einer Zeile, zwei Striche zeigen das Ende der Melodie an. Das Aufhebungszeichen (Quadrat) ist (>); das Wiederholungszeichen (:||); steht hinter diesem eine Zahl, dann wird der vorstehende Theil so oft wiederholt, als die Zahl angiebt. Z. B. pag. 28.

Jesu meines Lebens Leben etc.

bbb E F G · H A G F E | F F G < · H H < A H, :|| A G A · c H H A A | H H c · e e d e e | H G c H A G F, | G H A G F F E, ||

Jesus meine Zuversicht etc.

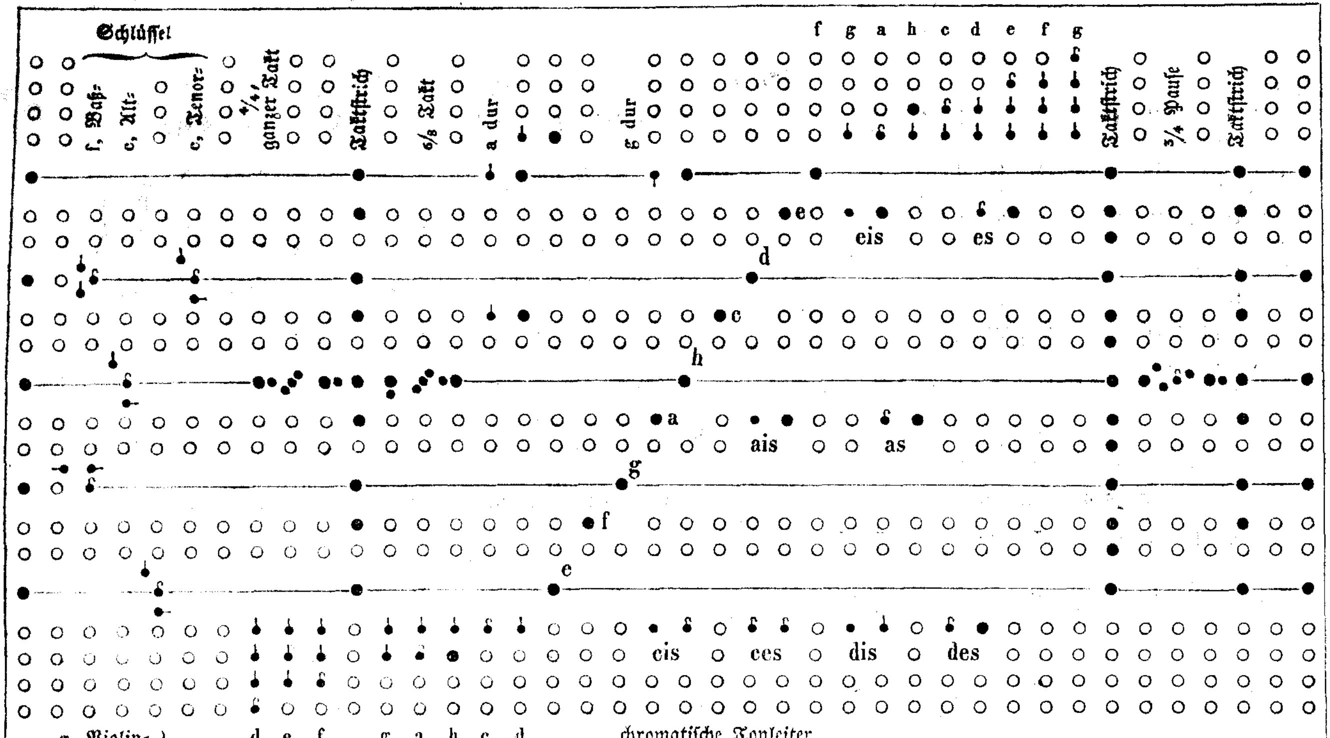
G E A H c c H, | A H c G F E D = D C, :|| E + F G E A + G A, | c d e c d . H c, ||

In diesen engen Grenzen ist die Bezeichnung der Noten durch Buchstaben ausführbar. Durch mehrere Arten von Buchstaben, Zahlen und Zeichen ließe sich diese Anwendung wohl noch erweitern, wenn das Bedürfniß gefühlt werden sollte.

Zur Bezeichnung des Notensystemes unter, zwischen und über den gebräuchlichen fünf Linien, auf unserer Tafel, werden alle Nadeln von ihr abgezogen. Am Rande links und rechts werden 5 große Nadeln so eingesteckt, daß zwischen je zweien 2 Löcherreihen frei bleiben. Um diese Nadeln herum schlingt man einen dünnen Bindfaden, indem man ihn 3mal nach rechts, und 2mal zurück nach links über die Tafel führt. Das Ende des Fadens kann man an einigen rechts unten eingesteckten Nadeln befestigen. Auch kann man 5 Messingdräthe, genau von der Länge der Löcherreihen, jeder an seinen beiden Enden mit einer Zoll langen, rechtwinklig abgebogenen Spitze versehen, mit dieser in den bezeichneten Endlöchern befestigen. Jede Linie erhält je nach dem verschiedenen Vorzeichen ihren verschiedenen Namen; als, Violine: e, g, h, d, f, (von unten auf gezählt); Sopran: c, e, g, h, d; Alt: f, a, c, e, g; Tenor: d, f, a, c, e; Baß: g, h, d, f, a. Die Schlüssel können bezeichnet werden: Violine 𝄞 g, durch eine Hakennadel auf der g Linie (2ten von unten), dem (als Primknopf betrachtet) in 2 und 9 eine Spitznadel hinzugefügt wird = g. Sopran: 𝄡 c, eine Hakennadel auf der c Linie (untere Linie), und in 6 und 9 Spitznadeln = z. Alt c, auf der c Linie, (dritten Linie von unten) und Tenor c, auf der c Linie (vierten Linie v. u.) dasselbe Zeichen; Baß 𝄢 f, auf der f Linie (vierten Linie v. u.) eine Hakennadel, und in 7 und 9 Spitznadeln, wie ein verkehrtes großes C. — Die diatonische Tonleiter läßt sich bezeichnen, für Violine: c unter den Linien, eine Hakennadel; d daneben in gleicher Höhe eine Spitznadel; e glatte große Nadel dicht über der ersten Linie; die folgenden Töne innerhalb der Linien alle durch glatte Großknöpfe, und zwar zwischen den Linien, f, a, c, e, dicht über den Linen g, h, d, f; g über den Linien eine Spitznadel; a in gleicher Höhe eine Hakennadel; h eine Spitznadel und darüber eine große glatte Nadel; c Spitznadel und darüber eine Hakennadel; d zwei Spitznadeln; e zwei Spitznadeln und eine Hakennadel; f drei Spitznadeln; g drei Spitznadeln und eine Hakennadel. Umgekehrt unter den Linien: h 1 Spitznadel und 1 Glattknopf darunter; a 1 Spitznadel und 1 Hakennadel; g 2 Spitznadeln; f 2 Spitznadeln und 1 Hakennadel; e 3 Spitznadeln, und d 3 Spitznadeln und 1 Hakennadel darunter. — Zur Bezeichnung der chromatischen Tonleiter wird dem zu erhöhenden Tone links eine kleine Nadel beigefügt. Die Erniedrigung eines Tones wird durch eine links beigefügte Hakennadel bezeichnet. — Die Bezeichnung der Tactart läßt sich durch Zahlen vor und nach einem Bruchstriche (Zähler und Nenner) bezeichnen, z. B. C = $^4/_4$; $^2/_4$; $^6/_8$ u. s. f.; Tactabschnitte durch vertical eingesteckte glatte Nadeln oder durch kleine an den Enden gebogene Dräthe; die Pausen durch eine Hakennadel zwischen den mittleren Linien, welcher das Maas der Pause 1, $^1/_2$, $^1/_4$ rc. in Zahlen beigefügt wird. — Mehr Schwierigkeiten, und durch unsere 4 Zeichen wohl nicht genügend ausführbar, ist die Bezeichnung der Werthe, der ganzen, halben, $^1/_4$, $^1/_8$ u. s. f. Noten; sie ließe sich durch an den Knöpfen angebrachte horizontale 1—4 Drathspitzchen ausführen. Die Verknüpfung mehrerer Noten ließe sich durch Umführen eines Fadens um die Nadeln, oder durch Einstecken an den Enden umgebogener Dräthchen verschiedener Länge bezeichnen. — Die Lehre der verwandten Tonarten, und die der consonirenden und dissonirenden Intervalle lassen sich genügend fühlbar darstellen.

Doch genug der Andeutungen. Vielleicht gelingt es einem in Musik Eingeweiheten, auch hierin Brauchbares und Vollkommneres mit Hülfe dieser Tafel zu schaffen.

Die nebenstehende graphische Darstellung wird das eben Gesagte verdeutlichen.



zu Seite 176.

Tab. I.

Erklärung des auf Tab. II. Dargestellten.

Division; s. pag. 23 und 24.

$$\begin{array}{l} 365 : 1360904690 \mid 372\ldots \\ \quad\;\; 1360 . \quad 2190 . \\ \quad\;\; 1095 \end{array}$$

Zins-Zinsrechnung mit Logarithmen; s. pag. 92.

$$\begin{array}{l} 57575 \text{ t } 4 \text{ p } 7 \text{ j} \\ 104 = \text{Lg.}\,0{,}0170333 \times 7 . \\ \qquad\qquad 0{,}1192331 . \\ \qquad\qquad 4{,}7602339 . \\ \hline \qquad\qquad 4{,}8794670 = 75764{,}7 \end{array}$$

Eine Gleichung ersten Grades mit 1 Unbek.; s. pag. 139

$$\begin{array}{l} 7x - 14 = 175 - 3\,{}^1/{}_2\,x . \\ 7x + 3\,{}^1/{}_2\,x = 175 + 14 . \\ 10\,{}^1/{}_2\,x = 189 . \quad \times 2 . \\ 21x = 378 . \; x = 18 \text{ Jan.} \end{array}$$

Die Formel zur Ausziehung der V^4; s. pag. 84.

$$V^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 .$$

Addition; s. pag. 22.

$$\begin{array}{r} 9753102684 \\ +\;2547098163 \\ \hline 12300200847 \end{array}$$

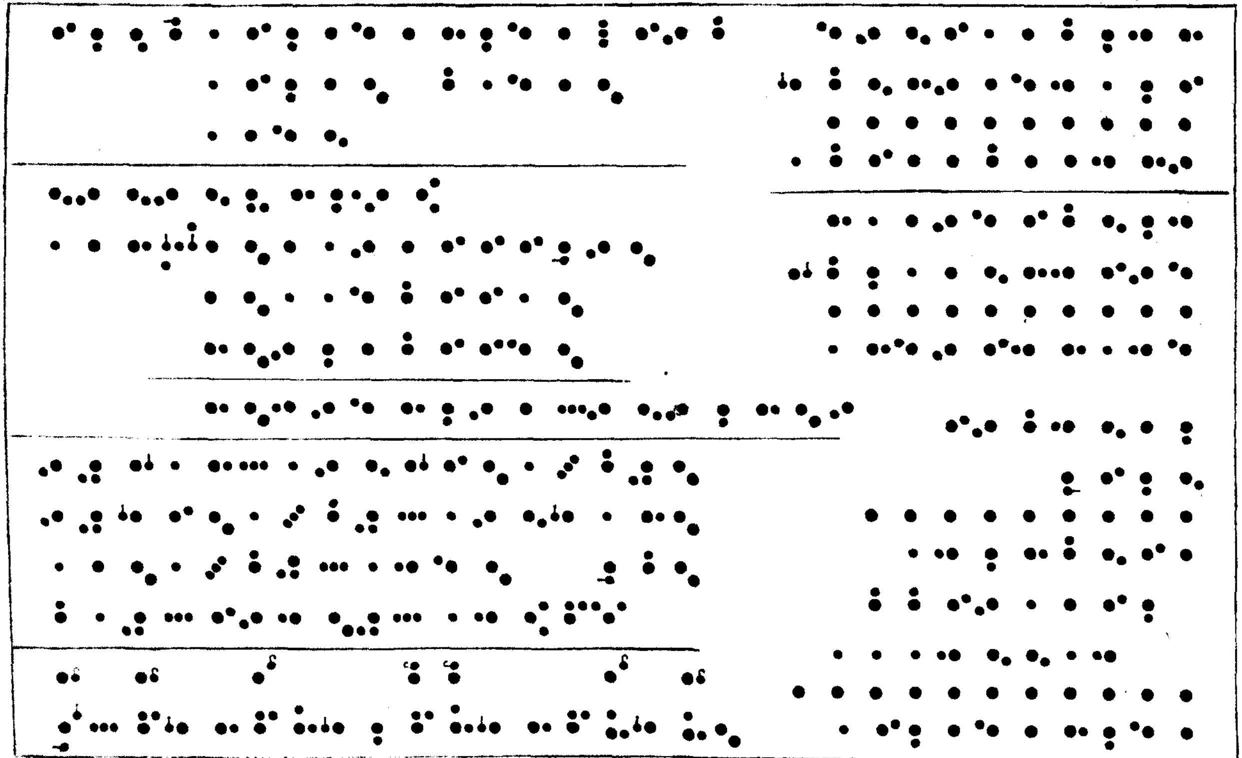
Subtraction; s. pag. 23.

$$\begin{array}{r} 4107932568 \\ -\;2610548379 \\ \hline 1497384189 \end{array}$$

Multiplication; s. pag. 22.

$$\begin{array}{r} 3728506 \\ \times\;365 \\ \hline 18642530 \\ 22371036 \\ 11185518 \\ \hline 1360904690 \end{array}$$

Oben



Unten

Tab. II.

Graphische Darstellung der Tafel

in ihrer

Anwendung auf Kettensatzrechnung.

Erklärung des auf Tab. III. Dargestellten:

Die Aufgabe findet sich S. 73; zu vergleichen sind S. 58 und 59.

Erster Aufsatz der Aufgabe:

283 7/9 Mg. : 2 = 141 8/9 = 1277/9.
18 1/2 St. f. 1 Mg. = 37/2.
W z. 5388 1121/1728 ℔ G. = 9302945/1728.
W p. W. 55 25/132 ℔ G. (40 Hpt.) = 7285/132.
L r. 5 1/2 ℔ Ct. = 11/2.

Aufsatz zum Kettensatze:

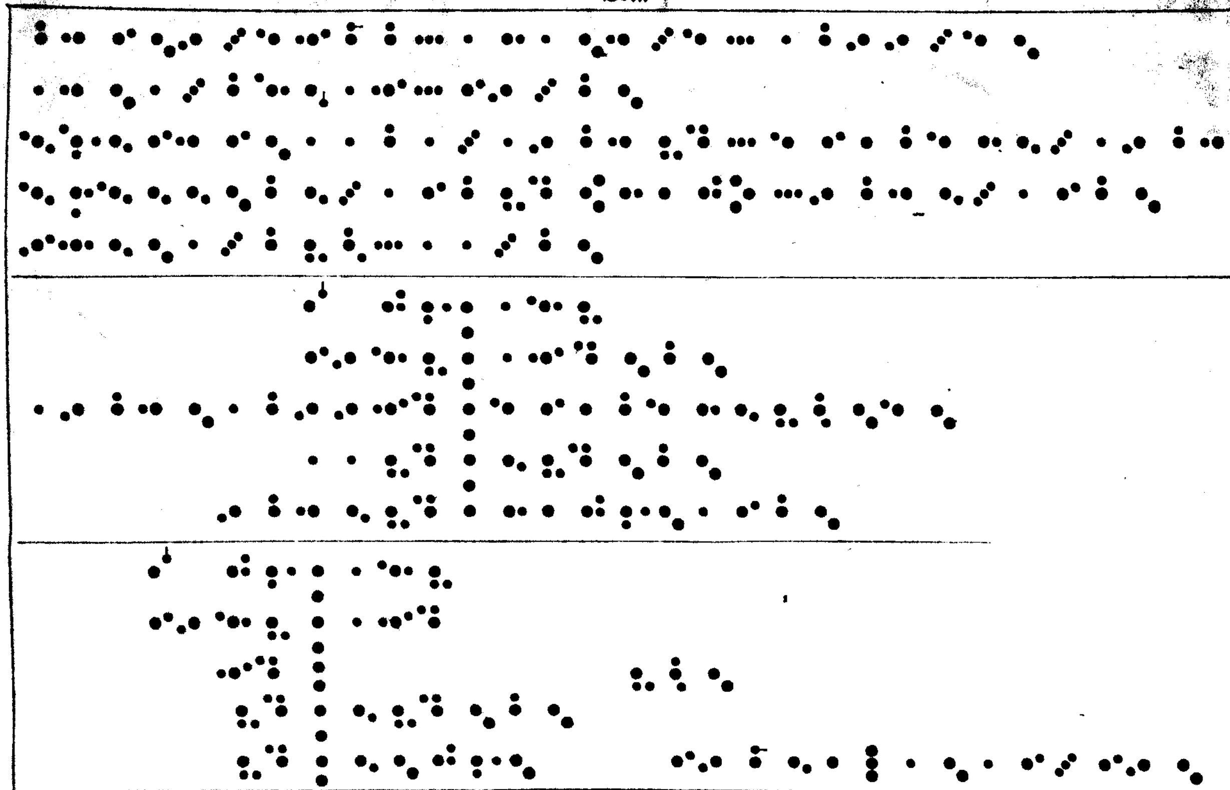
? hp.	1 St.
37 st.	1 mg. • 2 •
1728 • 1277 mg.	9302945 tc. • 9 •
11 tg.	5 tg. • 2 •
7285 tg.	40 hp. • 132 • 2 •

Nachdem alle zu hebenden Zahlen gehoben sind, bleibt nur stehen:

? hp.	1 St.
37 st.	1 mg. •
mg.	tc. •
tg.	5 tg. • 2 •
tg.	5 hp. •

demnach 37 : 50 | 1 • 13/37 •

Oben



Unten

Tab. III.